学院：数学与统计学院
班级：20级应数1班
姓名：郑璇
学号：202031501362
联系方式：15309444433

复变函数论

第一章 复数与复变函数

§1 复数

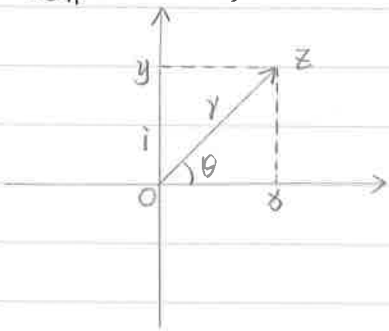
实数集: $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)=\{x:-\infty<x<+\infty\}$

复数集: $\mathbb{C}=\{z: z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R},\ i=\sqrt{-1}\ (i^2=-1)\}$

$x=\mathrm{Re}\,z$, $y=\mathrm{Im}\,z$

复数域: +运算(+、−、×、÷)

复平面:



$z\leftrightarrow P(x,y)\leftrightarrow\overrightarrow{OP}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}$, $\theta=\arg z+2k\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$

辐角: $\theta=\mathrm{Arg}\,z$ 不唯一

主辐角 $-\pi<\arg z\le\pi$

模: $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

代数形式: $z=x+iy$

三角形式: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

指数形式: $z=r\theta^{i\theta}$ $z=re^{i\theta}$

○ 实数是复数的一部分

除去虚数, 实轴.

欧拉公式: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$e^{\pi i}+1=0$

$e^{2k\pi i}=1$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

共轭复数: $\bar{z}$

$z\bar{z}=|z|^2$, $\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

○直线方程. $Ax+By+C=0$, $A,B,C\in\mathbb{R}$, A,B不同时为0

$A\cdot\frac{z+\bar{z}}{2}+B\frac{z-\bar{z}}{2i}+C=0$ $\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=c$

化简如下:

$$A(z+\bar{z})i+B(\bar{z}-\bar{z})+2Ci=0$$

$$(Ai+B)z+(Ai-B)\bar{z}+2iC=0$$

$$\frac{A-Bi}{-2}z+\frac{A+Bi}{-2}\bar{z}=C$$

令 $a=\frac{A+Bi}{-2}$ ，$\bar{a}=\frac{A-Bi}{-2}$

$\mathbb{C}=\{z:\ z=x+iy\ ,x,y\in\mathbb{R}\}$ 复数集(域)

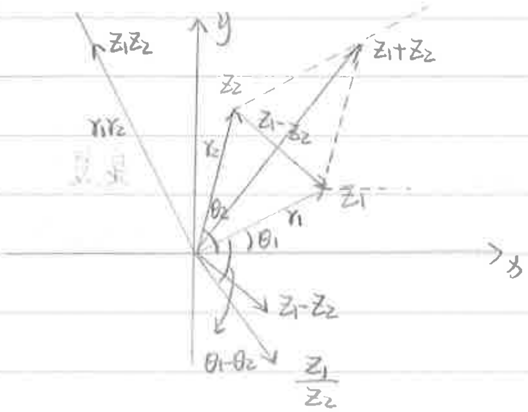
$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ，$z_i=x_i+iy_i=r_ie^{i\theta_i}$ ，$i=1,2$

$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$ 多项式

$$\left.\begin{aligned}&z_1\cdot z_2=(r_1e^{i\theta_1})\cdot(r_2e^{i\theta_2})=(r_2r_1)e^{i(\theta_1+\theta_2)}\\&\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)e^{i(\theta_1-\theta_2)}\end{aligned}\right\}\text{指数运算}$$

模相乘，辐角相加.

几何意义



$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2$$

乘幂与开方

$z = re^{i\theta}$

$z\cdot z\cdot \cdots \cdot z = z^n = r^n e^{in\theta}$ $\qquad w = u + iv$

$e^{2k\pi i} = 1,\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

$z \neq 0,\ w = \sqrt[n]{z} = \rho e^{i\varphi},\ \ w^n = z$ 1(逆思)

$\because \rho^n e^{in\varphi} = r\ e^{i\theta}$

$\therefore \rho^n = r,\ n\varphi = \underline{2k\pi + \theta}$

$\therefore \rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \dfrac{2k\pi+\theta}{n},\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ 2(逆思)

$\therefore w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}}$

$= \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{2k\pi + \arg z}{n}},\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

$k=0,\ w_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} = \rho e^{i\frac{\theta}{n}}$

$k=1,\ w_1 = \rho e^{i\frac{2\pi+\theta}{n}} = \rho e^{\frac{2\pi}{n}i}\cdot e^{\frac{\theta}{n}i}$

$= w_0 \cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}$

$k=2,\ w_2 = \rho e^{i\frac{4\pi+\theta}{n}}$

$= \rho e^{i\frac{2\pi+\theta+2\pi}{n}}$

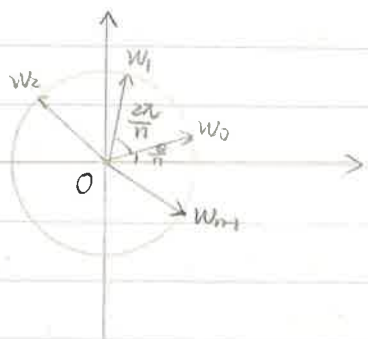
$= \rho e^{\frac{2\pi+\theta}{n}i}\cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}$

$= w_1 \cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}$

$\cdots$

$k = n-1,$

$w_{n-1} = w_{n-2}\cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}$



△ $w = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

$= \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{2k\pi+\arg z}{n}},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

内接于该圆周的正n边形的n个顶点.

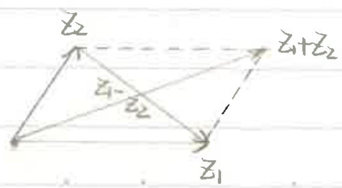
常用不等式

1. $|z|^2 = z\bar{z}$

2. $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2},\ \mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

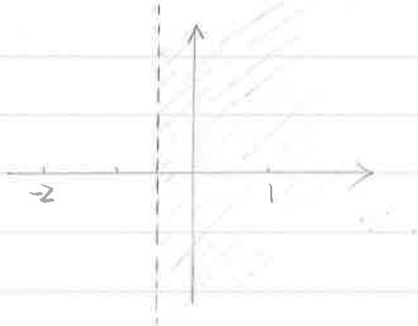
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (三角不等式)

$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$



例

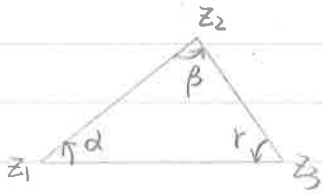
o $|z-1|<|z+2|$



$$\begin{cases} |z|<2 \\ 0<\arg z<\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$|z|=r$, $|z-a|=r$

证明三角形内角和等于π



证：设三角形的三个顶点分别为 z_1, z_2, z_3

对应的三个顶角分别为 α, β, r

$$\alpha=\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$$

$$\beta=\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$$

$$r=\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

$$\alpha+\beta+r=\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)+2k\pi$$

$$=\arg(-1)+2k\pi$$

$$=\pi+2k\pi \quad (k\text{为某个整数})$$

由假设 $0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$，$0<\gamma<\pi$，所以

$$0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$$

故必 $k=0$，因而 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

§2 复平面上的点集

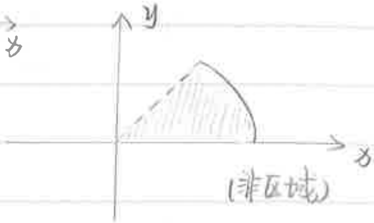
1. $|z-z_0|<\rho$ 表示以 z_0 为心，ρ 为半径的邻域

2. 区域：

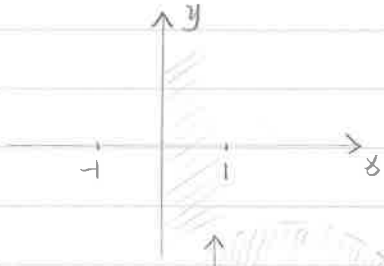
开集、连通

例： $\operatorname{Im} z>0$

$$\begin{cases} 0<\arg z<\frac{\pi}{4} \\ |z|\le 2 \end{cases}$$



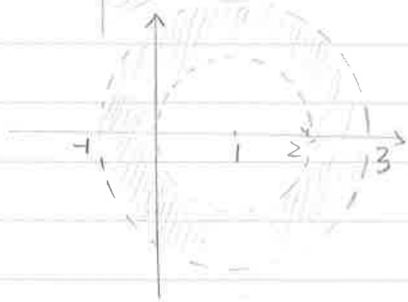
$$\frac{|z-1|}{|z+1|}<1$$

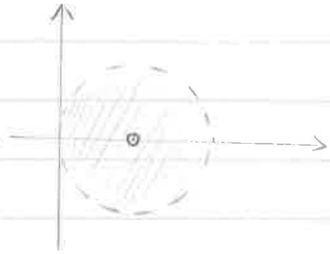


$|z-1|<|z+1|$

$1<|z-1|<2$

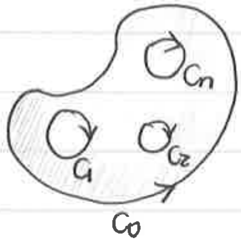
$0<|z-1|<1$





单连域、多连域：

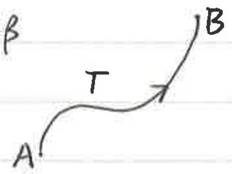
区域的方向



$C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$

3. 曲线

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$$



点对 ↓ 数　实 ↓ 复

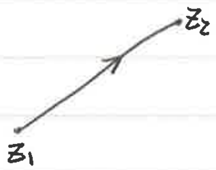
$z = z(t) = x(t) + iy(t)$

(1) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$

连 z_1 到 z_2 的直线段

$$z = z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

$0 \le t \le 1$

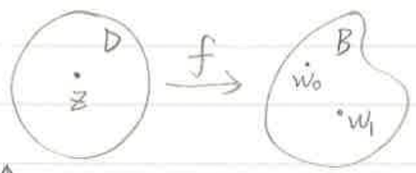


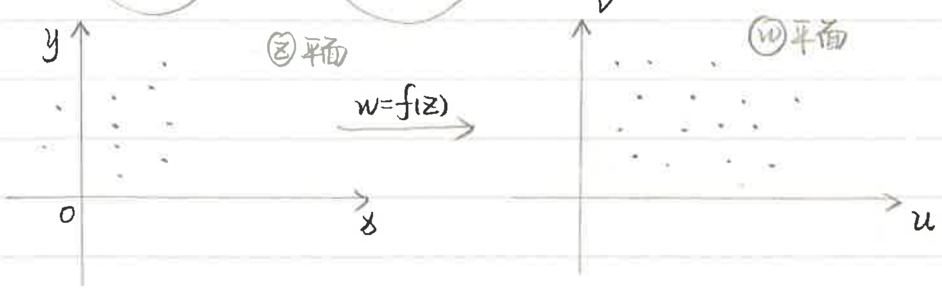
(2) $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $|z - a| = R$

$$z = a + Re^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

§3 复变函数

一、概念





定义：从复数集D到复数集B之间的一个对应关系f叫做D上的一个复变函数.

$w = f(z)$, $z \in D$

单值函数 $w=z^2+1$

$w=2z+1$ 单叶函数

多值函数 $w=\sqrt{z}$ 有限值

$w=\mathrm{Arg}z$，$z\neq0$ 无限值

二、复变函数的极限与连续

○难点：多值函数的单值化 (第二章3节)

注：

提到的为单值函数.(不特别声明)

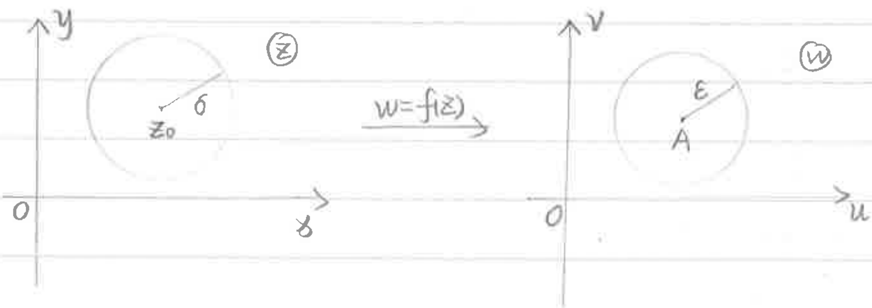
定义：

$w=f(z)$，$z\in D$，$z_0\in\mathbb{C}$

如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使 $\forall z$：$0<|z-z_0|<\delta$ 时，都有 $|f(z)-A|<\varepsilon$

则称 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$

$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$



$z=x+iy\in\mathbb{C}$ $z_0=x_0+iy_0$

$z\to z_0 \Leftrightarrow x\to x_0$，$y\to y_0$

$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z=x+iy$

$A=\xi+i\eta$ 任两二元实函数 $\Leftrightarrow$ 复变函数

$|f(z)-A|=|(u(x,y)-\xi)+i(v(x,y)-\eta)|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ $|u(x,y)-\xi|<\varepsilon$

$|v(x,y)-\eta|<\varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l}|u(x,y)-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}\\ |v(x,y)-\eta|<\frac{\varepsilon}{2}\end{array}\right. \Rightarrow |f(z)-A|<\varepsilon$$

(两边之和小于第三边)

结论:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(z)=A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=\xi \text{ 且 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=\eta.$$

二重极限描写复极限.

复变函数的极限与连续是数学分析里二元函数的极限与连续.

连续: ① 有定义

② 极限存在

③ 等于函数值

例1 证明 $w=\underbrace{x^2+y}_{\text{有极限}}+i\underbrace{(x+y^2)}_{\text{有极限}}$ 在平面上处处有极限

例2: 求 $f(z)=\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}$ 在 $z\to 0$ 时的极限.

$$\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}^2+z^2}{z\bar{z}}$$

$$=\frac{(x-iy)^2+(x+iy)^2}{z^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y)=\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=0$$

$u(x,y)=\frac{2(1-k^2)}{1+k^2}$ 沿 $y=kx$ 趋于0时极限不存在.

例3 证明 $f(z)=\mathrm{Re}\,z/|z|$ 在 $z\to 0$ 时的极限不存在

沿负实轴趋于0, $f(z)$ 的极限为 -1

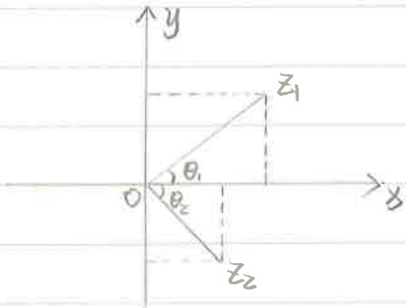
正 ‥ ‥‥ 1

故极限不存在.

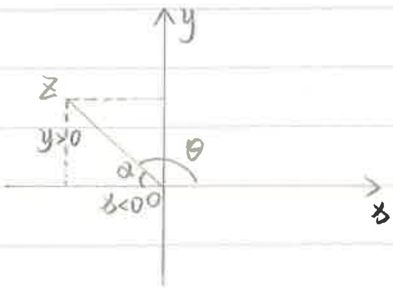
$z \neq 0$, $-\pi < \arg z \leq \pi$

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & z \in \mathrm{I}, \mathrm{IV}, \ x>0, y \in \mathbb{R} \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & z \in \mathrm{II}, \ x<0, y>0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, & z \in \mathrm{III}, \ x<0, y<0 \\ 0 & x>0, y=0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0, y>0 \\ \pi & x<0, y=0 \\ -\frac{\pi}{2} & x=0, y<0 \end{cases}$$

$z \in \mathrm{I}、\mathrm{IV}$



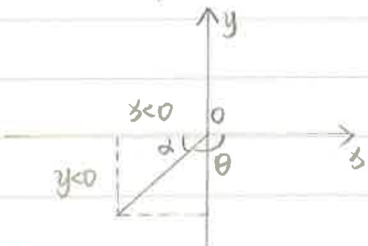
$z \in \mathrm{II}$



$\arg z = \pi + \arctan\frac{y}{x}$

$\alpha = -\arctan\frac{y}{x}$

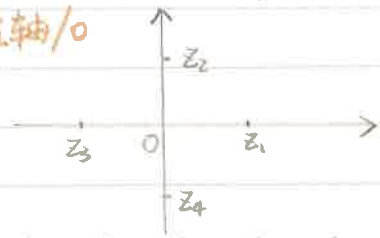
$z \in \mathrm{III}$



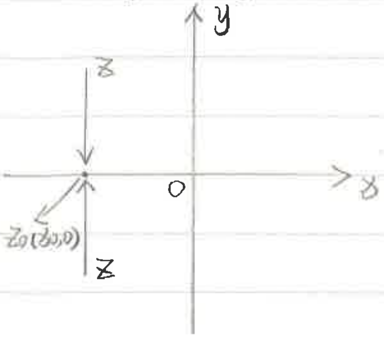
$\arg z = -\pi + \arctan\frac{y}{x}$

$\alpha = \arctan\frac{y}{x}$

$z \in$ 实虚轴/0



例4 证明 $f(z)=\arg z$ 在原点及负实轴上不连续.



(1) 四个象限的初等函数在定义域上连续;
(2) 原点无定义;
(3) 正、负虚轴;
(4) 正、负实轴.

(3) $\forall z=z_0=y_0 i$, $\arg z_0=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0,\, x>0}} \arctan\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0,\, x<0}} \arg z=\lim_{\substack{x\to 0,\, x<0\\ y\to y_0,\, y>0}} \left(\pi+\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

(4) $\forall z=z_0=x_0$, $x_0<0$, $y_0=0$, $\arg z_0=\pi$

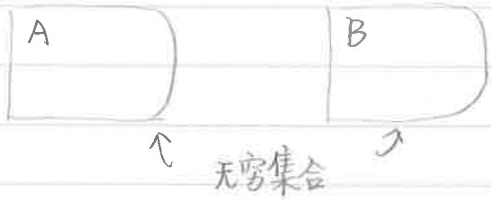
$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \left(\begin{smallmatrix} y>0,\, x<0\\ y\to 0,\, x\to x_0\end{smallmatrix}\right)}} \arg z=\lim_{z\to z_0} \left(\pi+\arctan\frac{y}{x}\right)=\pi$$

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ \left(\begin{smallmatrix} y<0,\, x<0\\ y\to 0,\, x\to x_0\end{smallmatrix}\right)}} \arg z=\lim_{z\to z_0} \left(\arctan\frac{y}{x}-\pi\right)=-\pi$$

§4 复球面与无穷远点

“复平面不完美”

问题：单位球面上的点的个数多还是平面上点的个数多？



元素个数的多少？

$\forall\, x\in A,\ \exists\, y\in B$ s.t. $x\to y$;

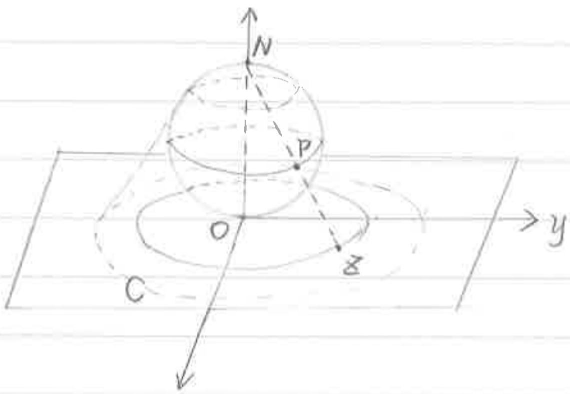
$x_1, x_2\in A,\ x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2$

$\forall\, y\in B,\ \exists\, x\in A$ s.t. $y\to x$.

1-1映射(双射)　　$A\sim B$ 对等

$\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$

扩充复平面　$C_\infty=C\cup\{\infty\}$



无穷远点的邻域

对于复球面，是一线北极点N的小圆C的内部及以上球盖

对于扩充复平面，是大圆C的外部，即$|z|>R$

第二章 解析函数

§1 解析函数的概念与柯西-黎曼方程

1. z_0点可导的定义

$$f'(z_0)=\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

如果$f(z)$在D内每一点都可导，称$f(z)$在D内(上)可导.

2. 解析函数

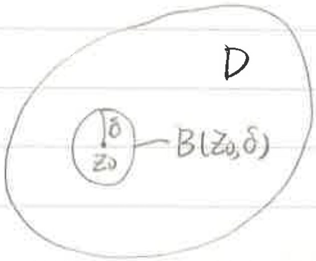
如果$f(z)$在区域内每一点可导，则称$f(z)$为D内的解析函数.

$f(z)$在区域D内解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在D内可导

$\Leftrightarrow$ $f(z)$在D内每一点可导

○ $f(z)$在z_0点可导 $\not\Leftrightarrow$ $f(z)$在z_0点解析

$f(z)$在z_0解析：(整体概念)



$\exists\ \delta>0$，使$f(z)$在$B(z_0,\delta)$内可导.

举例：函数在一点可导但不解析的例子.

3. 求导法则

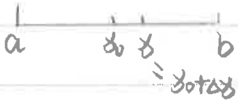
四则
复合 } 运算法则　同数分

形式上一样，实质上不一

实:

$y=f(x)$, $x\in I=[a,b]$, $x_0\in(a,b)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$



(左、右趋于)

$\Delta x\to 0 \Leftrightarrow x\to x_0$

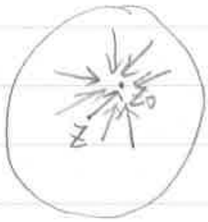
$\Delta x = x - x_0$

复: $w=f(z)$

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$$



$\Delta z = \Delta x_0 + i\Delta y$

不同 (1) 自变量趋于过程的复杂.

(2) 表达式更复杂, 复数之商, 向量之商.

4. 导数

$z_0=x_0+iy_0$, $z=x+iy$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$\Delta f = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$$

$$=u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$$

$$-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))$$

$$=[u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)]+i[v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)]$$

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}$$

$\Delta z\to 0 \Leftrightarrow \Delta x\to 0, \Delta y\to 0.$

1° $\Delta y=0$, $\Delta x\to 0$

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)+i(v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0))}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta_x u+i\Delta_x v}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+i\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

2° $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{u(x_0,\Delta y+y_0)-u(x_0,y_0)+i(v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0))}{i\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta_y u+i\Delta_y v}{i\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{i\Delta_y v}{i\Delta y}+\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta_y u}{i\Delta y}$$

$$=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$

则
$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$
$$=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$
（若$f'(z_0)$存在）

$\therefore$ $u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)$

$v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0)$

$\left.\begin{aligned}u_x&=v_y\\ u_y&=-v_x\end{aligned}\right\}$ C-R条件. C-R方程.

可导的必要条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

定理2.1（可微的必要条件）

设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内有定义，且在D内一点$z=x+iy$可微，则必有

(1) 偏导数u_x,u_y,v_x,v_y在点(x,y)存在

(2) $u(x,y),v(x,y)$在点(x,y)满足C.-R.方程.

定理2.2（可微的充要条件）

设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内有定义，则$f(z)$在D内一点$z=x+iy$可微的充要条件是

(1) 二元函数$u(x,y),v(x,y)$在点(x,y)可微.

(2) $u(x,y),v(x,y)$在点(x,y)满足C.-R.方程.

定理2.3（可微的充分条件）

设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内有定义，则$f(z)$在D内一点$z=x+iy$可微的充分条件是

(1) u_x,u_y,v_x,v_y在点(x,y)连续.

(2) $u(x,y),v(x,y)$在点(x,y)满足C.-R.方程

3. 模与辐角

$|e^z| = e^x = e^{Re z}$

$\mathrm{Arg}\, e^z = y = \mathrm{Im} z$

例: $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$|e^{z^2}| = e^{x^2-y^2}$

$\mathrm{Arg}\, e^{z^2} = 2xy$.

4. $e^{2k\pi i} = 1$

5. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)$

$e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$

$$
\begin{aligned}
e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1+x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \\
&= e^{z_1+z_2}
\end{aligned}
$$

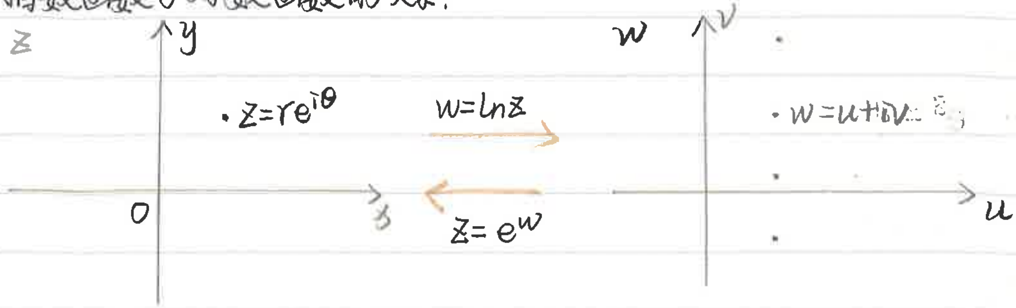
※ 6. 周期性.

$e^{2k\pi i} = 1$ △

$e^{z+2k\pi i} = e^z$

故 e^z 为以 $2\pi i$ 为基本周期的周期函数

指数函数与对数函数的关系.



$$e^{u+iv}=re^{i\theta}$$

$$\begin{cases} e^{u}=r \\ v=\theta+2k\pi, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \end{cases}$$

$$\underline{w=\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi)}$$

$$=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

例: 1. $e^{3+i}=e^{3}(\cos 1+i\sin 1)$

2. $|e^{i-2z}|=e^{-2\operatorname{Re} z}$

3. $\ln(-1)=\ln|-1|+i(\arg z+2k\pi)$

$=0+i(\arg(-1)+2k\pi)$

$=i(\pi+2k\pi) \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

4. $\ln(1+\sqrt{3}i)=\ln 2+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

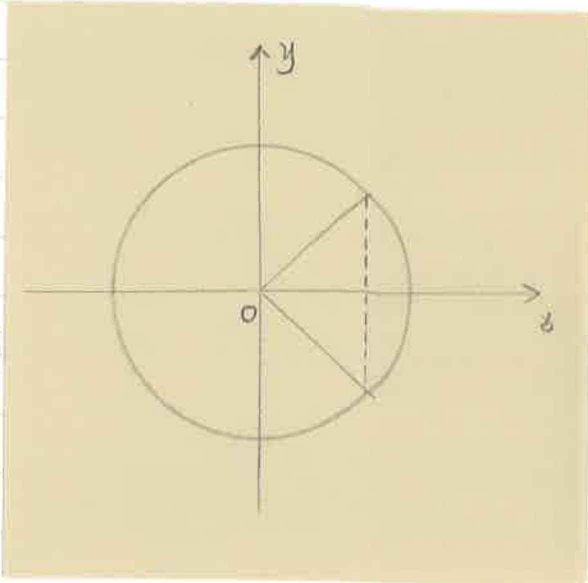
二. 三角函数

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad ①$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \quad ②$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad (z = x \in \mathbb{R},\ y=0)$$



定义： $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$

性质：

1. 连续、可导性.

$\cos z$、$\sin z$ 在 $\mathbb{C}$ 上连续、可导.

即 $\cos z$、$\sin z$ 为 $\mathbb{C}$ 上的解析函数

且 $(\cos z)' = \left(\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)' = \dfrac{(e^{iz})'+(e^{-iz})'}{2}$

$$= \frac{e^{iz}\cdot i + e^{-iz}(-i)}{2}$$

$$= \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$(\sin z)' = \cos z$

$f(z)$ 叫整函数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析

e^z、$\sin z$、$\cos z$, $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $z \in \mathbb{C}$

2. 奇偶性.

$\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$

3. $\sin z$，$\cos z$ 为以 2π 为基本周期的周期函数

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}$$

$$=\frac{e^{iz}\cdot e^{2\pi i}+e^{-iz}\cdot e^{-2\pi i}}{2}$$

$$=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$$

4. 零点（有没有多余零点）

令 $\sin z=0$ 即 $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0$，$e^{2iz}=1$

又 $e^{2ik\pi}=1$

$z=k\pi$

$\sin z$ 以 $k\pi$ 为零点，$\cos z$ 以 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 为零点

※5. $|\sin z|\le 1$ $|\cos z|\le 1$ 不再成立.

且 $|\sin z|$，$|\cos z|$ 为无界函数.

$$\cos 2022i=\frac{e^{i(2022i)}+e^{-i(2022i)}}{2}$$

$$=\frac{e^{2022}+e^{-2022}}{2}>\frac{e^{2022}}{2}>e^{2021}$$

对于其它三角函数、求导公式与实的一样.

$$\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}+\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}$$

$$=1$$

（和差、积化、倍角、万能…）

三、双曲函数.

§3 初等多值函数

重点学习:

1. 根式函数
2. 对数函数

1. $w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\cdots,n-1$ $\quad z\neq0$

2. $w=\ln z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$, $k=0,\pm1,\pm2\cdots$ $\quad z\neq0$

支点: $0,\infty$

$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi$

由 $\mathrm{Arg}\,z$ 的多值性引起了 $\sqrt[n]{z}$ 和 $\ln z$ 的多值性.

研究思路:

将 $\mathrm{Arg}\,z$ 单值化, 就可以将 $\sqrt[n]{z}$, $\ln z$ 单值化.

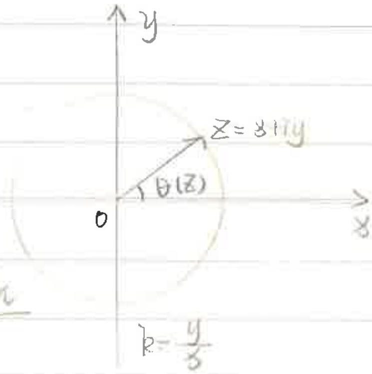
一. 辐角函数

$\theta(z)=\mathrm{Arg}\,z$, $z\neq0$ $\quad D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\forall z\neq0$

$\theta(z)=\mathrm{Arg}\,z=\angle(\vec{ox},\vec{oz})$

$=\arg z+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 周期 2π



单值化: $z_0\neq0$, z_0 处指定一个值 θ_0 , $\forall z\neq z_0$, $z\in G$, 使 z 处的值 θ 完全由 θ_0 确定 (唯一), G 叫 $\theta(z)=\mathrm{Arg}\,z$ 的一个单值性区域.

$\theta=\theta_0+\Delta_\Gamma\arg z$

$\Delta_\Gamma\arg z$: z 从 z_0 出发沿 Γ 变化到 z 时产生的辐角增量 $\Delta\theta$.

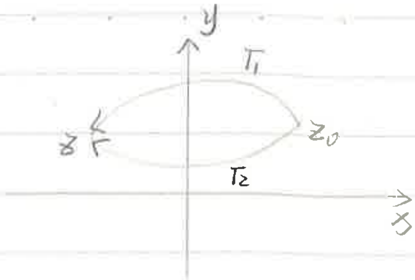
$\forall z\in G$, $\theta(z)$ 唯一

$\Leftrightarrow$ $\forall\Gamma_1,\Gamma_2$, $z_0\to z$, $\Delta_{\Gamma_1}\arg z=\Delta_{\Gamma_2}\arg z$

$\Leftrightarrow$ $\Delta_{\Gamma_1}\arg z-\Delta_{\Gamma_2}\arg z=0$

$\Leftrightarrow \Delta_{\Gamma_1} \arg z + \Delta_{\Gamma_2^-} \arg z = 0$

$\Gamma_1 + \Gamma_2^-$ 为G内闭曲线

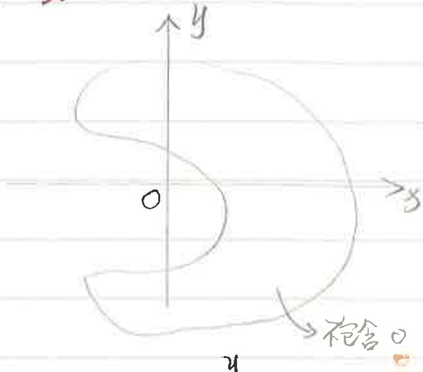


$\Leftrightarrow$ G内任一条闭曲线 C

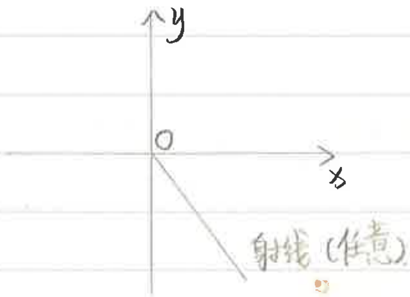
$\Delta_C \arg z = 0$

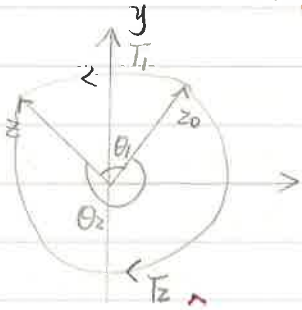
$\Delta_{\Gamma_1} \arg z = -\Delta_{\Gamma_2^-} \arg z$

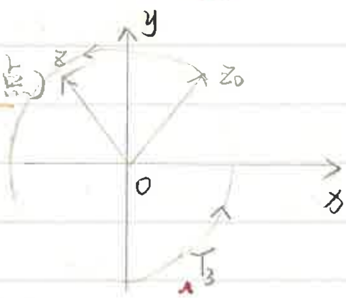
$\Leftrightarrow$ G内任意一条闭曲线 C，C内都不能包含原点 o。



区域内封闭曲线包含原点。







（除 o、射线以外区域内的曲线包含原点）

进一步，找最大、最理想的区域G，

使G内任一条闭曲线，都不含 o

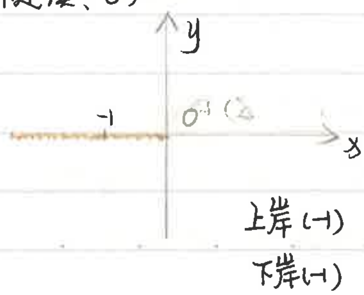
↓

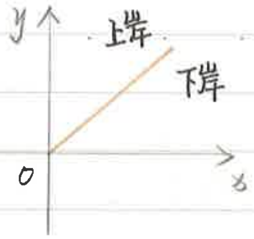
（负实轴不连续、o）

0、∞、 割破 C = G

↑

• 从原点出发，沿负实轴割破复平面 G.





设G为沿负实轴割破的z平面，则G为Argz的一个单值性区域，$z_0\in G$，$z_0\to\theta_0$，则 $\forall z\in G$，$\theta(z)=\theta_0+\Delta_\Gamma \arg z$　$\arg z_0+2k\pi$，$k=0$.

(单值化表达式)　(唯一取值)

$\theta_k(z)=\underbrace{\arg z_0+2k\pi}_{\theta_0}+\Delta_\Gamma \arg z$，$\forall z\in G$

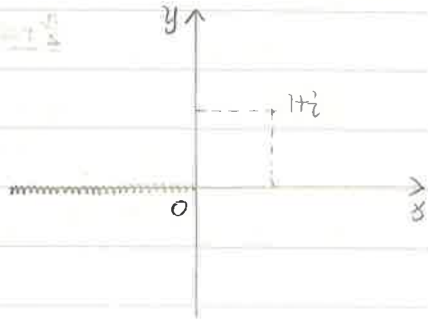
$k=0,\pm1,\pm2$

(无穷多个单值表达式)

特别地，$k=0$，$\theta_0(z)=\arg z_0+\Delta_\Gamma \arg z$　主值支

例1 试确定 $\theta(z)=\mathrm{Arg}\,z$ 的一个单值性区域，并求在 $z=1+i$ 处取值为 $\frac{9}{4}\pi$ 的那个分支在 $z=i$，$-1-i$ 处的值.

解：因为0和∞为Argz的支点，所以从原点0出发沿负实轴割破的z平面得到的区域G为它的一个单值性区域. 得到 $\theta(z)=\mathrm{Arg}\,z$ 的无穷多个单值连续分支. 其中第k个分支表达式为：



$$\theta_k(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi+\Delta_\Gamma \arg z,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$\because \theta_k(1+i)=\frac{9}{4}\pi$

$\therefore \frac{9}{4}\pi=\frac{\pi}{4}+2k\pi+0$　$\therefore k=1$

故满足 $\theta_k(1+i)=\frac{9}{4}\pi$ 的分支表达式为 $\theta_1(z)=\frac{\pi}{4}+2\pi+\Delta_\Gamma \arg z$，$z\in G$

$\theta_1(i)=\frac{9}{4}\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{2}\pi$

$\theta_1(-1-i)=\frac{9}{4}\pi+(-\pi)=\frac{5}{4}\pi$

$\theta_1(-1)\big|_{上岸}=\frac{9}{4}\pi+\frac{3}{4}\pi=3\pi$

$\theta_1(-1)\big|_{下岸}=\frac{9}{4}\pi-\frac{5}{4}\pi=\pi$

二、$w=\sqrt[n]{z}$ 和 $w=\ln z$.

$\sqrt[n]{z}$ 和 $\ln z$ 与 $\mathrm{Arg}\,z$ 的单值性区域相同，0,∞为其支点，故沿负轴割破的z平面为其单值性区域，$w=\sqrt[n]{z}$ 得到n个单值解析分支

分支表达式为：

$$w_k(z)=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\arg z_0+2k\pi+\Delta_\Gamma \arg z}{n}},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

$$\left(w_k(z)=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\mathrm{Arg}\,z}{n}}\right)$$

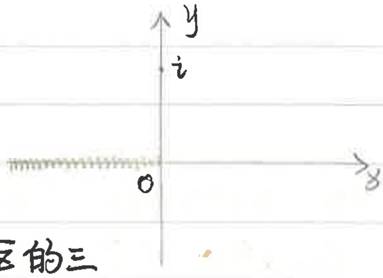
同样，得到 $w=\ln z$ 的无穷多的单值解析分支

其中第k个分支表达式为：

$$w_k(z)=\ln|z|+i(\arg z_0+2k\pi+\Delta_\Gamma\arg z)$$

$$(w_k(z)=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z)\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

例2：设 $w=\sqrt[3]{z}$ 确定在从原点 $z=0$ 出发沿负实轴割破了的z平面上，并且 $w(i)=-i$，试求 $w(-i)$.



解：因为0,∞为 $\sqrt[3]{z}$ 的支点，所以从原点0出发沿负实轴割破的z平面得到的区域G为它的一个单值性区域．得到 $w=\sqrt[3]{z}$ 的三个单值解析分支，其中第k个分支表达式为

$$w_k(z)=\sqrt[3]{|z|}\,e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi+\Delta_\Gamma\arg z}{3}},\quad k=0,1,2,$$

∴满足条件 $w(i)=-i$ 的分支为 $k=2$ 的那个分支，即

$$w_2(z)=\sqrt[3]{|z|}\,e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi+\Delta_\Gamma\arg z}{3}}$$

∴ $w_2(-i)=e^{i\frac{\frac{9\pi}{2}+(-\pi)}{3}}=e^{\frac{7}{6}\pi i}=e^{-\frac{5}{6}\pi i}$

主辐角.

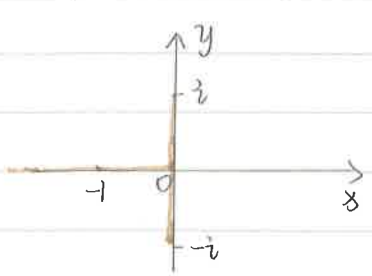
三、多支点情形

1. $\theta(z)=\mathrm{Arg}\,p(z)$，$p(z)$为多项式

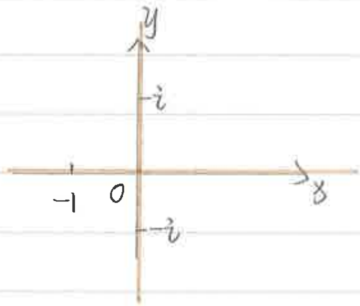
支点：$p(z)=0$的点，∞

例：$p(z)=z(z+1)(z^2+1)$

支点：$0,-1,i,-i,\infty$



(V)



(X)

(此割法得到的平面不是区域)

割法：① 找连续、连接所有的支点

② 构成区域

在$\theta(z)=\mathrm{Arg}\,p(z)$的单值性区域$G$上，得到无穷多个单值连续分支，其中第$k$个分支为：

$$\theta_k(z)=\arg p(z_0)+2k\pi+\Delta_\Gamma \arg p(z),\ z\in G$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

2. $w(z)=\sqrt[n]{p(z)}$

$$w_k(z)=\sqrt[n]{|p(z)|}\,e^{i\frac{\arg p(z_0)+2k\pi+\Delta_\Gamma \arg p(z)}{n}},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1$$

分析其符合要求的支点：(存在真假支点)

$$e^{i\frac{\arg p(z_0)+2k\pi+\Delta_\Gamma \arg p(z)}{n}}=e^{i\frac{\arg p(z_0)+2k\pi}{n}}\cdot e^{i\frac{\Delta_\Gamma \arg p(z)}{n}}$$

$$\frac{\Delta_\Gamma \arg p(z)}{n}=k\cdot 2\pi \quad * \quad \leftarrow \quad e^{i2k\pi}=1.$$

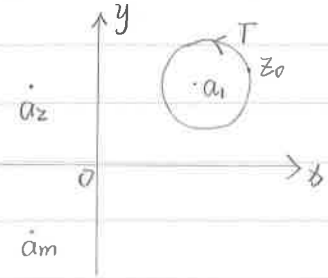
$w(z)=\sqrt[n]{p(z)}$ 支点的判断：

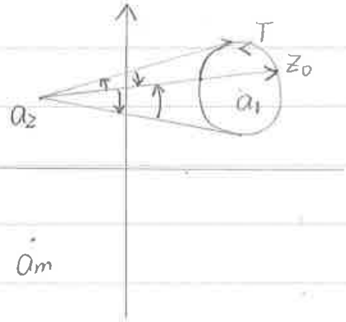
可能的支点为 $p(z)=0$ 的点及 ∞，

$p(z)=(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots(z-a_m)^{\alpha_m}$

可能支点：$a_1, a_2, \cdots, a_m, \infty$

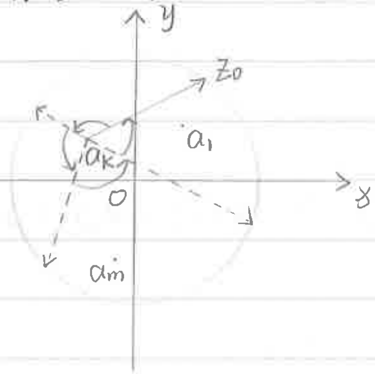
$$\Delta_T \arg P(z)=\alpha_1\Delta_T\arg(z-a_1)+\alpha_2\Delta_p\arg(z-a_2)+\cdots+\alpha_m\Delta_T(z-a_m)$$





※结论：a_k 为 $\sqrt[n]{p(z)}$ 的支点 $\Leftrightarrow$ $\frac{\alpha_k}{n}$ 非整

∞ 为 $\sqrt[n]{p(z)}$ 的支点 $\Leftrightarrow$ $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}{n}$ 非整



$$\Delta_T\arg P(z)=\alpha_1\cdot 2\pi+\cdots+\alpha_k\cdot 2\pi+\cdots+\alpha_m\cdot 2\pi$$
$$=(\alpha_1+\cdots+\alpha_k+\cdots+\alpha_m)\cdot 2\pi$$

则 $\frac{\Delta_p\arg p(z)}{n}=\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k+\cdots+\alpha_m)\cdot 2\pi}{n}$

例：$f(z)=\sqrt{z(1-z)}$　　支点：$0, 1, (\cancel{\infty})$

$f(z)=\sqrt[3]{z(1-z)}$　　支点：$0, 1, \infty$

$w(z)=\sqrt{z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$　　支点：$0, 1, 2, 3, 4, \infty$

例3 试证 $f(z)=\sqrt[3]{z(1-z)}$ 在将 z 平面适当割开能分出三个单值解析分支，并求出在点 $z=2$ 取负值的那个分支在 $z=i$ 的值.

解：$f(z)=\sqrt[3]{z(1-z)}$ 可能支点为 $0,1,\infty$，经判断全为支点

故沿 $[0,1]$，负虚轴割开的 z 平面 G 上能得到三个单值解析分支

其中第k个分支表达式为

$$f_k(z)=\sqrt[3]{|z(1-z)|}\,e^{i\frac{\pi+2k\pi+\Delta_\Gamma \arg z(1-z)}{3}} \qquad (P(2)=-2)$$

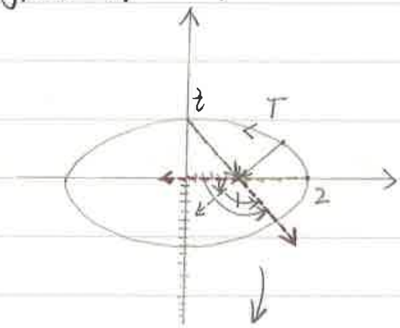
$k=0,1,2$

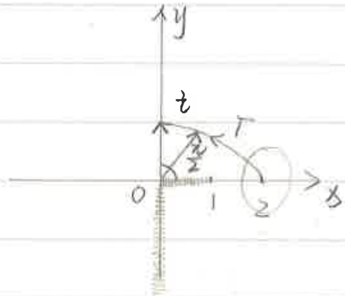
$\because f_k(2)<0$

$\therefore \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi+2k\pi+0}{3}}<0$

$\therefore k=1$，故所求分支为：

$$f_1(z)=\sqrt[3]{|z(1-z)|}\,e^{i\frac{3\pi+\Delta_P \arg z+\Delta_P \arg(1-z)}{3}},\ z\in G$$





$\Delta\arg(1-z)$

$$\therefore f_1(i)=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{3\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\pi}{3}}=\sqrt[6]{2}\,e^{\frac{17}{12}\pi i}=\sqrt[6]{2}\,e^{-\frac{7}{12}\pi i}$$

若沿正虚轴割开：

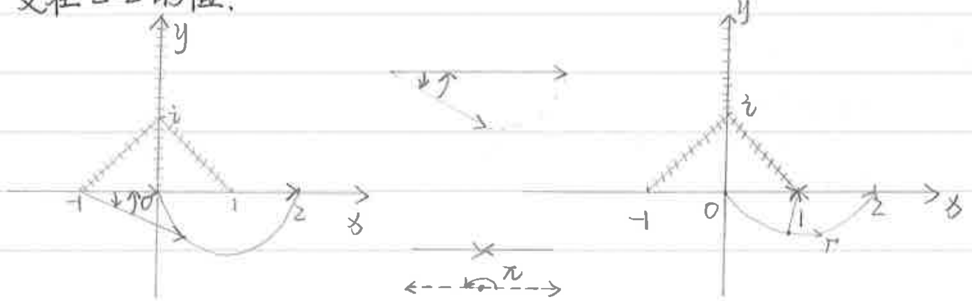
$$f_1(i)\Big|_{右岸}=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{3\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\pi}{3}}=\sqrt[6]{2}\,e^{\frac{17}{12}\pi i}=\sqrt[6]{2}\,e^{-\frac{7}{12}\pi i}$$

$$f_1(i)\Big|_{左岸}=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{3\pi+(\frac{3}{2}\pi)-\frac{5}{4}\pi}{3}}=\sqrt[6]{2}\,e^{\frac{5}{12}i}$$

3. $w=\operatorname{Ln} P(z)$

$$w_k(z)=(\operatorname{Ln}P(z))_k=\ln|P(z)|+i(\arg P(z_0)+2k\pi+\Delta_P\arg P(z))$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

例4 试证 $\operatorname{Ln}(1-z^2)$ 在割去"从-1到i的直线段""从i到1的直线段"与射线"$x=0$且$y\geq1$"的z平面内能分出单值解析分支．并求 $z=0$ 时等于零的那一支在 $z=2$ 的值．



解．$\operatorname{Ln}(1-z^2)$ 的支点 $-1,1,\infty$，故割开的z平面 G 上得到无穷多个单值解析分支，其中第k个分支为

$$w_k(z)=\ln|1-z^2|+i(0+2k\pi+\Delta_P\arg(1-z^2))$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$\because w_k(0)=0$

$\therefore \ln|1-0|+i(0+2k\pi+0)=0$

$\therefore k=0$，故所求分支为

$$w_0(z)=\ln|1-z^2|+i(\Delta_\Gamma\arg(1-z^2))$$
$$=\ln|1-z^2|+i\Delta_\Gamma\arg(1-z)+i\Delta_\Gamma\arg(1+z)$$
$$=\ln3+i(\pi+0)$$
$$=\ln3+\pi i$$

$z+a$
$=z-(-a)$
z^2+1
$=z^2-i^2=(z+i)(z-i)$

第三章 复变函数的积分

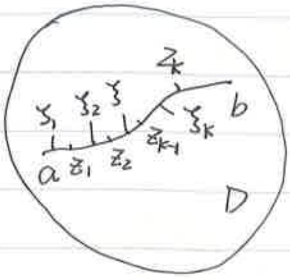
§1 复积分的概念及其简单性质

一.定义

$w=f(z)$，$z\in D$，Γ为D内一条曲线. Γ: $a=z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n=b$

取介点 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$

如果 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ 存在



且与T和介点无关，则称f(z)在Γ上可积

且称极限值为f(z)在Γ上的积分.

$$\int_\Gamma f(z)dz=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

复数不可比较大小

介点用“，”.

性质:

1. $\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz$
2. $\int_\Gamma af(z)dz = a\int_\Gamma f(z)dz$
3. $\int_\Gamma [f(z)+g(z)]dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_\Gamma g(z)dz$

线性性

研究积分和:

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z=x+iy$，$\zeta_k=\eta_k+i\xi_k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{\infty}[u(\eta_k,\xi_k)+iv(\eta_k,\xi_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}[u(\eta_k,\xi_k)\Delta x_k - v(\eta_k,\xi_k)\Delta y_k]$$

$$+i\sum_{k=1}^{\infty}[v(\eta_k,\xi_k)\Delta x_k + u(\eta_k,\xi_k)\Delta y_k]$$

公式1: $\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\Gamma v\,dx + u\,dy$

(一般的计算复积分的公式)

(第二型曲线积分)

用定义计算复积分:

$$\int_\Gamma dz = b-a$$

$$\int_\Gamma z\,dz = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

当 Γ 为闭曲线时, $\int_\Gamma dz=0$, $\int_\Gamma z\,dz=0$
$(a=b)$

性质4: (估值性)

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| = \int_C |f(z)|\,ds.$$

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \lim_{\|T\|\to 0} \left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right|$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot|\Delta z_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sqrt{u^2(\eta_k,\xi_k)+v^2(\eta_k,\xi_k)}\cdot\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2}$$

极限

$$\to \int_\Gamma \sqrt{u^2+v^2}\,ds.$$

(第一类曲线积分)

$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$

$f(\zeta_k)=\eta_k+i\xi_k$

$\Delta z_k=\Delta x_k+i\Delta y_k.$

性质5: 路径的可加性

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

其中 C 由曲线 C_1 和 C_2 衔接而成.

公式2 (参数方程法)

Γ: $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, 则

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

公式3:

$$\int_{|z-a|=R} \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i & ,n=1 \\ 0 & ,n\neq 1,\ n\in \mathbb{Z} \end{cases}$$

证: $z=a+Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}\cdot i\,d\theta}{(Re^{i\theta})^n}$$

$$= iR^{1-n}\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}\,d\theta$$

$$\overset{n\neq 1}{=} \frac{iR^{1-n}}{i(1-n)} e^{i(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi}$$ 根据指数函数性质计算?

$$\overset{n\neq 1}{=} \frac{R^{1-n}}{(1-n)}\big(\underbrace{e^{i(1-n)\cdot 2\pi}}_{1}-1\big) = 0$$

当$n=1$时, $iR^0\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}\,d\theta = 2\pi i$

例: $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

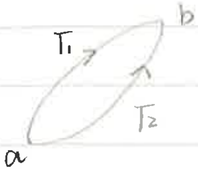
$\int_{|z|=3} \frac{1}{z^4}\,dz = 0$

注: 积分值与a, R均无关, a可为0

缺陷: 积分曲线与积分函数里的a为同一个a才可用.

§2 柯西积分定理

$\int_\Gamma f(z)dz$ 与 Γ 无关 $\Leftrightarrow$ $\forall \Gamma_1, \Gamma_2$, $a\to b$, 有 $\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$.



$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z)dz = 0$$

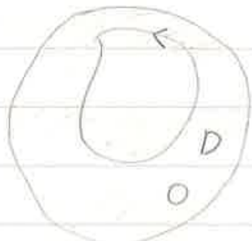
$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2^-} f(z)dz = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\forall$ 闭曲线 C, 有 $\int_C f(z)dz = 0$

1825年 Cauchy 通过大量计算和观察，回答 $\int_\Gamma f(z)dz$ 与路径无关的问题.
1851年 Riemann 增加 "$f'(z)$ 在 D 内连续"
1900年 Goursat 给出证明 （闭区间套定理）

Cauchy 积分定理:

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则对 D 内的任一条闭曲线，只要 C 及 C 的内部都属于 D，则 $\int_C f(z)dz = 0$



Riemann 证明:

加条件 "u_x, u_y, v_x, v_y 在 D 内连续"

工具: Green 公式 （格林公式）

$$\oint_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

P_x, P_y, Q_x, Q_y 在 G 内连续

C内部解析性未知
不满足条件.

证明: $\int_C f(z)dz = \int_C u dx - v dy + i\int_C v dx + u dy$

$$\overset{\text{Green}}{\underset{\text{公式}}{=}} \iint_D (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_D (u_x - v_y)dxdy = 0$$

又 $f(z)$ 在 D 内解析 $\Rightarrow$ $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, $\forall (x,y) \in D$

变上限积分

$f(z)$在单连域D内解析，$\forall C$，$\int_C f(z)dz=0$

则$f(z)$在D内的积分与路径无关。

$\downarrow$

$$F(z)=\int_\Gamma f(\xi)d\xi=\int_a^z f(\xi)d\xi \quad \forall z\in D \quad \begin{pmatrix}\text{定点 } a\in D\\ \text{动点 } z\in D\end{pmatrix}$$

复变微积分学基本定理

$f(z)$在单连域D内$\boxed{\text{解析}}$，$a\in D$，则 $F(z)=\int_a^z f(\xi)d\xi$ 在D内也解析，且$F'(z)=f(z)$.

连续 + 积分与路径无关性（更一般）

证明：$\forall z_0\in D$，要使$F(z)$在z_0可导，且$F'(z_0)=f(z_0)$

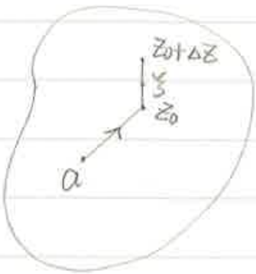
F(z)在D内每一点都可导

即证 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{F(z_0+\Delta z)-F(z_0)}{\Delta z}=f(z_0)$

$$\left|\frac{F(z_0+\Delta z)-F(z_0)}{\Delta z}-f(z_0)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left(\int_a^{z_0+\Delta z}f(\xi)d\xi-\int_a^{z_0}f(\xi)d\xi\right)-f(z_0)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z_0+\Delta z}f(\xi)d\xi-f(z_0)\right|$$



$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z_0+\Delta z}[f(\xi)-f(z_0)]\,d\xi\right|$$

$$\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z_0}^{z_0+\Delta z}|f(\xi)-f(z_0)|\,ds$$

$$=\frac{1}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z|\cdot\varepsilon=\varepsilon.$$

$\because \lim\limits_{\xi\to z_0}f(\xi)=f(z_0)$

$\therefore \forall \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使$|\xi-z_0|<\delta$时，$|f(\xi)-f(z_0)|<\varepsilon$

$(|\Delta z|<\delta)$

N-L公式

$f(z)$在单连域D内解析，则$\int_\Gamma f(z)dz=F(b)-F(a)$

其中$F(z)$为$f(z)$的一个原函数。$\searrow$ 比整函数

证明：令 $G(z)=\int_a^z f(\xi)d\xi$，则 $G(z)$ 在 D 内解析，且 $G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数.

$\therefore$ $G(z)-F(z)=C$，$\forall z\in D$

即 $\int_a^z f(\xi)d\xi - F(z)=C$

令 $z=a$，得 $0-F(a)=C$

$\therefore$ $\int_a^z f(\xi)d\xi - F(z) = -F(a)$

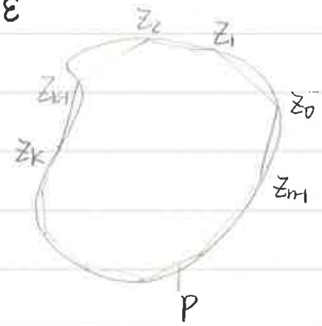
令 $z=b$，$\int_a^b f(\xi)d\xi = F(b)-F(a)$

1900年 Goursat 证明

第1步：

证明：$\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 内接于 C 内的闭折线 P，使 P 在 D 内，而

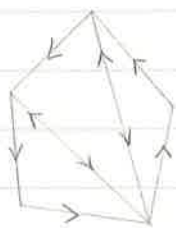
$$\left|\int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| < \varepsilon$$



第2步：若任一条闭折线 P，有 $\int_P f(z)dz=0$，则 $\int_C f(z)dz=0$

第3步：如果 $\forall\triangle$，有 $\int_\triangle f(z)dz=0$，则 $\forall$ 闭折线 P，$\int_P f(z)dz=0$

$$\int_P f(z)dz=\int_{\triangle_1}+\cdots+\int_{\triangle_{n-2}}=0$$

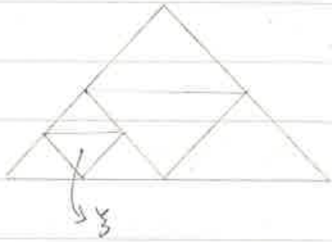


$n-2$ 个三角形

第4步:

定理的简化为 $\forall\Delta$，$\int_\Delta f(z)\,dz=0$

(闭集套定理)



$\xi\in\Delta_n$，

$M=\left|\int_\Delta f(z)\,dz\right|$

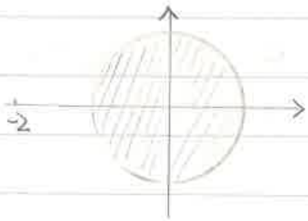
$\left|\int_{\partial n} f(z)\,dz\right|\geq\frac{M}{4^n}$

Cauchy 积分定理的推广

推广1:

$f(z)$在闭曲线 C上连续且在 C内部解析，则 $\int_C f(z)\,dz=0$

例: $\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\,dz=0$



$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{\cos z}\,dz=0$

$f(z)=\frac{1}{\cos z}$ 在 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 处不解析

$\because\ \frac{\pi}{2}>\frac{1}{2}$

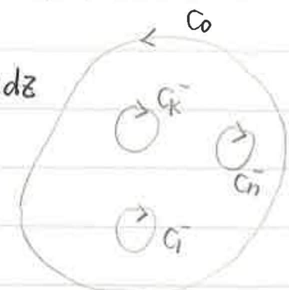
$\therefore\ f(z)$在 $|z|\leq\frac{1}{2}$ 内解析.

推广2:

$f(z)$在边界 $C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$ 上连续，D内解析.

$\int_{C_0} f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\cdots+\int_{C_k} f(z)\,dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)\,dz$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,dz$

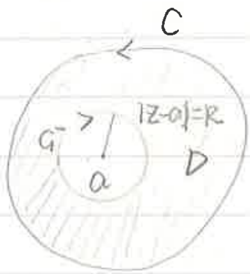


公式3的推广：

$$\int_{|z-a|=R} \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq 1,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

推广：C为任一条闭曲线，a在C的内部任一点，则

$$\int_{C} \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq 1,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$



证明：作 $|z-a|=R$，使 $|z-a|\le R$ 属于C内部

且与C不交，

则 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^n}$ 在D内解析，在D的边界 $C+C_1^-$ 上连续，故

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \int_{|z-a|=R} \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq 1 \end{cases}$$

例：计算 $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,dz$

解法1：

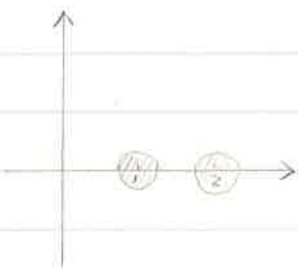
$$\int_{|z|=5} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,dz = \int_{|z|=5} \frac{1}{z-2}\,dz - \int_{|z|=5} \frac{1}{z-1}\,dz$$

$$= 2\pi i - 2\pi i$$

$$= 0$$

解法2：

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} = \int_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} + \int_{|z-2|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z-1)(z-2)}$$



其中 $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} = \int_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{z-2} - \int_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{z-1} = 0-2\pi i = -2\pi i$

$$\int_{|z-2|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} = \int_{|z-2|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{z-2} - \int_{|z-2|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i - 0 = 2\pi i$$

故 $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} = -2\pi i + 2\pi i = 0$

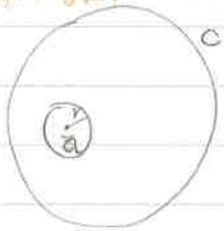
§3 柯西积分公式

f(z)在C内解析,在C上连续,a∈D

公式4: $\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$　(柯西积分公式)　$\begin{cases} a\text{在}C\text{内} \\ a\text{在}C\text{外},\ 0 \end{cases}$

(单个奇点)

证明: $\int_C \frac{f(z)}{z-a} = \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}dz$

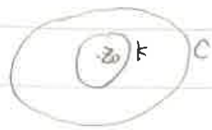


$$\left|\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}dz - 2\pi i f(a)\right|$$

$$=\left|\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|$$

$$\le \int_{|z-a|=r} \frac{|f(z)-f(a)|}{r}ds$$

$$= \frac{1}{r}\int_{|z-a|=r} |f(z)-f(a)|ds$$



K: $|z-z_0|=r$

$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \lim_{r\to 0}\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

$r\to 0,\ z\to z_0,\ f(z)\to f(z_0)$

$= f(z_0)\oint_K \frac{1}{z-z_0}dz$

$= 2\pi i f(z_0)$

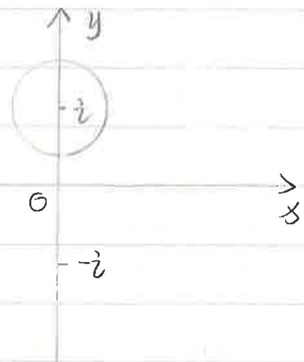
$\because \lim_{z\to a} f(z)=f(a)$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,使 $\forall z$: $|z-a|=r<\delta$ 时, $|f(z)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2\pi}$

则 $\frac{1}{r}\int_{|z-a|=r} |f(z)-f(a)|ds < \frac{1}{r}\int_{|z-a|=r}\frac{\varepsilon}{2\pi}ds = \varepsilon$

(可与后面留数定理相比)

例: 计算 $\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}dz$.



解: $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$ 的奇点为: $0, i, -i$

原式 $= \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z(z+i)}}{z-i}dz$

$= 2\pi i \cdot \frac{1}{i(i+i)} = -\pi i$

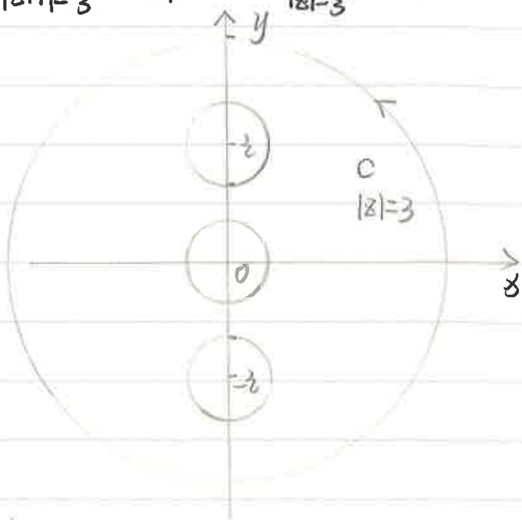
柯西积分公式不仅给出了求围线积分的一种方法，还给出了解析函数的积分表达式从而成为研究解析函数的一个有力工具. 两个及以上奇点无法转化成公式就不可用.

例: $\int_{|z|=3}\frac{dz}{z(z^2+1)} = \int_{|z-i|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{z(z^2+1)} + \int_{|z+i|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{z(z^2+1)} + \int_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{z(z^2+1)}$

$= \int_{|z-i|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{z(z+i)}}{z-i}dz + \int_{|z+i|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{z(z-i)}}{z+i}dz + \int_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{z^2+1}}{z}dz$

$= -\pi i - \pi i + 2\pi i$

$= 0$



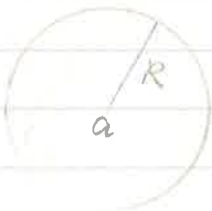
例 $\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}dz = 2\pi i$

平均值性质:

$f(z)$ 在 $|z-a|\le R$ 内解析, $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})d\theta$

证: $2\pi i f(a) = \int_{|z-a|=R}\frac{f(z)}{z-a}dz$

$= \int_0^{2\pi}\frac{f(a+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}\cdot Re^{i\theta}\cdot i\,d\theta$



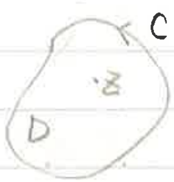
几何意义:

圆内解析函数的圆心值 = 圆周上值的算术平均数.

$f(z)$在D内解析, 在C上连续, 则 $\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$

$\Leftrightarrow f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-a}d\xi$

$\Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad \forall z\in D$



意义:

区域D内的解析函数$f(z)$在D的边界C上连续，则D内任一点处的函数值完全可由$f(z)$在边界C上的值确定

$\Leftrightarrow$ $f_1(z), f_2(z)$在区域D内解析，在边界C上连续

若$f_1(\zeta)=f_2(\zeta)$，$\zeta\in C$

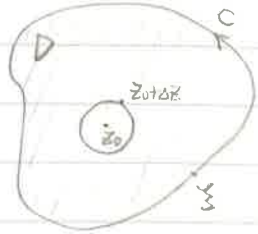
则 $f_1(z)\equiv f_2(z)$，$\forall z\in D$.

定理(解析函数无穷可微性)

设$f(z)$在D内解析，在C上连续，则$f(z)$在D内任意阶导数存在，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\ \forall z\in D$$

$n=1,2,3,\cdots$ (高阶导数公式)



证明：先证$n=1$时成立，即$\forall z_0$

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta$$

需证 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta$

$$\frac{1}{\Delta z}(f(z_0+\Delta z)-f(z_0))=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\Delta z}\left(\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0-\Delta z}d\zeta-\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)(\zeta-z_0-\Delta z)}d\zeta$$

$$\therefore I=\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)(\zeta-z_0-\Delta z)}-\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\right]d\zeta\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_C\frac{\Delta z\, f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2(\zeta-z_0-\Delta z)}d\zeta\right|$$

$$\le\frac{|\Delta z|}{2\pi}\int_C\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^2|\zeta-z_0-\Delta z|}ds$$

令 $M=\max\limits_{\zeta\in C}|f(\zeta)|$，$d=d(z_0,C)=\inf\limits_{\zeta\in C}|\zeta-z_0|$

- 高阶导数公式的主要作用是求围线积分，求积分比求导更困难

l=闭曲线c的长度，$|\Delta z|<\frac{d}{2}$

则 $|\zeta-z_0|\geq d$，$|\zeta-z_0-\Delta z|\geq|\zeta-z_0|-|\Delta z|$

$$> d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}$$

$$\therefore\ I\leq\frac{|\Delta z|}{2\pi}\int_c\frac{M}{d^2\cdot\frac{d}{2}}ds$$

$$=|\Delta z|\cdot\frac{Ml}{\pi d^3}$$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$，要使 $I<\varepsilon$，只要 $|\Delta z|<\frac{\pi d^3}{Ml}\varepsilon$

$\therefore$ 令 $\delta=\min\{\frac{d}{2},\frac{\pi d^3}{Ml}\varepsilon\}$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\min\{\frac{d}{2},\frac{\pi d^3}{Ml}\varepsilon\}>0$，当 $|\Delta z|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta\right|<\varepsilon$$

由数学归纳法

假设 $n=k$ 时定理成立，即

$$f^{(k)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\ ,\forall z\in D$$

要证 $\forall z_0\in D$，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f^{(k)}(z_0+\Delta z)-f^{(k)}(z_0)}{\Delta z}=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+2}}d\zeta$$

注1° 在定理条件下，$f^{(n)}(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在D内解析.

(任意 n+1 阶导数存在，n阶导数连续)

可导

注2° $\int_c\frac{f(z)}{(z-a)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$ （公式5）

公式5.

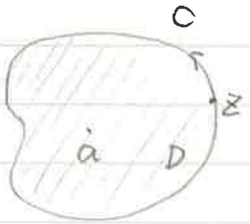
例：$\int_c\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz=\frac{2\pi i}{2}(\cos z)''|_{z=i}$

$$=-\cos i\cdot\pi i$$

$$=-\pi i\cos i.$$

柯西不等式

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\ ,\quad a\in D$$

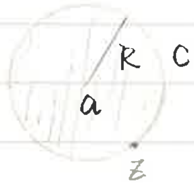


若 $f(z)$ 在 $|z-a|\le R$ 内解析

$$M=\max_{|z-a|=R}|f(z)|$$

$$\left|f^{(n)}(a)\right|=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right|$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\int_{|z-a|=R}\frac{|f(z)|}{R^{n+1}}\,ds$$



$$\le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R$$

$$=\frac{n!M}{R^n}$$

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\le\frac{n!\max\limits_{|z-a|=R}|f(z)|}{R^n}$$ (Cauchy 不等式)

对解析函数各阶导数模的估计式

Morera 定理 (柯西积分定理逆定理)

设 $f(z)$ 在单连域 D 内连续 $\triangle 1$，且 D 内的任一条闭曲线 C，都有 $\int_C f(z)\,dz=0$ 2，则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证明：令 $F(z)=\int_a^z f(\zeta)\,d\zeta$，$\forall z\in D$，则 $F(z)$ 在 D 内解析 (1.2 → Th 3.7, P81)

且 $F'(z)=f(z)$，$z\in D$

$\therefore f(z)$ 在 D 内解析. (注 1°)

解析函数的导函数  是解析的

Liouville 定理

有界整函数必为常数. (模有界定理)

证明：已知 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，且

$|f(z)|\le M$，$\forall z\in\mathbb{C}$

要证 $f(z)\equiv C$，$\forall z\in\mathbb{C}$

只需证 $f'(z)\equiv 0$，$\forall z\in\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow f'(a)=0$，$\forall a\in\mathbb{C}$

$\forall R>0$，在 $|z-a|\le R$ 上，由 Cauchy 不等式得：

$$0\le |f'(a)|\le \frac{\max\limits_{|z-a|=R}|f(z)|}{R}\le \frac{M}{R}\to 0 \quad (R\to+\infty)$$

$\therefore |f'(a)|=0$

$\therefore f'(a)=0$

逆否命题：非常值整函数无界

不能含在一个圆内（圆外）

其逆也真：常数是有界整函数

§4 解析函数和调和函数的关系

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, Laplace 算子

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\Delta u = 0$ Laplace 方程

定义：(调和函数)

$u(x,y)$ 为D上的具二阶连续偏导数的函数，如果 $\Delta u=0$，则称 u 为D上的一个调和函数.

∘ 设 $f(z)=u+iv$ 为D内的解析函数

① $f'(z)=u_x+iv_x$ 是解析函数

$\because u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$\therefore u_{xx} = v_{yx}$, $u_{yy} = -v_{xy}$

$\Delta u = v_{yx} - v_{xy} = 0$

$\therefore u$ 为D内的调和函数

同理 v 为D内的调和函数.

结论：解析函数的实部和虚部一定是调和函数，且 s.t. C-R满足条件.

∘ 任给D内的一个调和函数 $u(x,y)$，则存在一个解析函数 $f(z)$，使得 u 为 $f(z)$ 的实部，且相差一个常数不计的情况下，$f(z)$ 为唯一的.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

解析函数 $\underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}}$ 调和函数

② $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

$-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = dv$ (全微分)

个数是否一样多?

$v = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C$

$Pdx + Qdy = dv$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, 满足 C-R. 条件

$f(z)=u+iv$ 为D内的解析函数

v 叫 u 的共轭调和函数.

例：验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 是z平面上的调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使满足 $f(0)=i$.

解：$u_x=3x^2-\overset{3}{\cancel{6}}y^2$，$u_y=-6xy$

$u_{xx}=6x \quad u_{yy}=-6x$

$\Delta u=0$，$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\quad\therefore u(x,y)$ 为平面上的调和函数

(法一)

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} 6xy\,dx+(3x^2-\overset{3}{\cancel{6}}y^2)dy+C$$

$$=\int_0^x 0\,dx+\int_0^y(3x^2-\overset{3}{\cancel{6}}y^2)dy+C$$

$$=3x^2y-y^3+C$$

$\therefore f(z)=u+iv$

$$=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+C)$$

$$=z^3+Ci$$ ，C 为常数.

(法二)

$\because v_x=-u_y$，$v_y=u_x$

$v_x=6xy$，$v_y=3x^2-3y^2$

$$v(x,y)=\int 6xy\,dx+\cancel{C(y)}$$

$$=3x^2y+C(y)$$

$\therefore v_y=3x^2+C'(y)$

$\therefore C'(y)=-3y^2$

$\therefore C(y)=\int -3y^2dy=-y^3+C$

$\therefore v(x,y)=3x^2y-y^3+C$

(法三)

$\because f'(z)=u_x+iv_x$

$$=3x^2-3y^2+i\,6xy$$

$$=3(x^2+2ixy\cancel{+}-y^2)$$

$$=3z^2$$

$\therefore f(z)=\int_0^z 3z^2dz=z^3+C$

习题三

8. 由积分 $\int_C \frac{dz}{z+2}$ 之值证明

$$\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$

其中C取单位圆周 $|z|=1$.

解: $f(z)=\frac{1}{z+2}$ 在 $\mathbb{C}$ 上除 $z=-2$ 外解析

故 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 内解析

$\therefore$ 由 Cauchy 积分定理得

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z+2}dz=0$$

又$\because$ $C: z=e^{i\theta}, 0\le\theta\le 2\pi$

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}+2}\cdot e^{i\theta}\cdot i\, d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta+2+i\sin\theta}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+2-i\sin\theta)}{(\cos\theta+2)^2+\sin^2\theta}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{(\cos^2\theta+2\cos\theta+\sin^2\theta)+i\cdot 2\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

$$=-2\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta+i\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$

且

$$\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$

(1) $\because \int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$ 周期性

$=2\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$ 奇偶性

$$\therefore \int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}=0$$

(2) $\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$ $\theta=2\pi-t$

$=\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta+\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}dt$ (令 $t=2\pi-\theta$)

变量替换

第四章 解析函数与幂级数

§1 复级数基本性质

$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

部分和：$S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$，$n=1,2,\cdots$

无限和

$\lim_{n\to\infty}S_n=S \Leftrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k+i\sum_{k=1}^{n}b_k \to S=\xi+i\eta$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\xi$ 且 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\eta$

结论：$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同时收敛

且 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+i\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

例：判断级数的敛散性

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}i}{2}\right)^n$

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}i}{2}\right)^n$ $\qquad r=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\theta=\arctan\sqrt{5}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(re^{i\theta})^n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}r^n e^{in\theta}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

$r=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\theta$，$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n\theta$ 发散.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}i}{2}\right)^n$ 发散.

柯西收敛准则 $\qquad |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty}S_n=S \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N, \forall p$，有 $|c_{n+1}+\cdots+c_{n+p}|<\varepsilon$

截取了p项

绝对收敛 — 运算律 $\begin{cases}\text{对角线方法}\\ \text{矩阵方法}\end{cases}$
条件收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}|C_n| \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{收敛}$$

定理 4.4 P108

数项级数和函数项级数的关系
自变量取定值

二、函数项级数

$$f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

首要问题：收敛域

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad , z\in D$$

这是有限函数求和所得到的和函数性质所不需要条件。

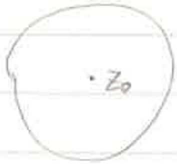
$\begin{cases}\text{点态收敛}\\ \text{一致收敛}\end{cases}$ (区间) N

可以使得每个函数的连续性，可导性与积分性质推广到和函数上。

"和函数的性质"

1. 连续性：若 $f_n(z)$ 在D上连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在D内一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在D内也连续，即：

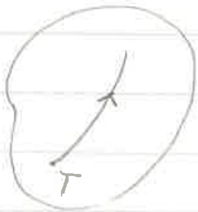
$$\forall z_0\in D,\ \underbrace{\lim_{z\to z_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)}_{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{z\to z_0} f_n(z)$$



2. 逐项可积性：

若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在D内一致收敛于 $f(z)$，且 Γ 为D内任一路径，$\int_\Gamma f_n(z)dz$ 存在，则 $f(z)$ 在 Γ 上可积。

$$\text{且} \underbrace{\int_\Gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,dz}_{\int_\Gamma f(z)dz} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Gamma f_n(z)\,dz$$



3. 逐项可导性

※ weierstrass 定理

设 $f_n(z)$ 在D内解析，且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在D内 内闭一致收敛于 $f(z)$，则

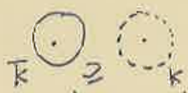
① $f(z)$ 在D内解析；

② 任意的 $p=1,2,\cdots$，都有 $f^{(p)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z)$，$z\in D$

$\Leftrightarrow$ $\forall z_0\in D$，有

$$f^{(p)}(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z_0).$$

(1)根据函数在一点解析的定义



由点的任意性，在D内解析

莫雷拉定理 $\begin{cases}\text{连续}\\ \text{积分与路径无关}\end{cases}$

在 $\bar{K}$ 内成立

自然在K上成立 → 条件给出了内闭一致收敛，只能这样想.

§2 幂级数

$f(z)=c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$ $\quad$ $z=a$时收敛（退化）

$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ $\quad$ $|z-a|<R$ $\quad$ 学习幂级数的原因

Abel $\quad$ 收敛区域可以研究清楚，

半径：$R=\frac{1}{l}$ $\quad$ 是收敛圆

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ $\quad$ （定理 4.13） $\quad$ ？ 其它原因

收敛圆

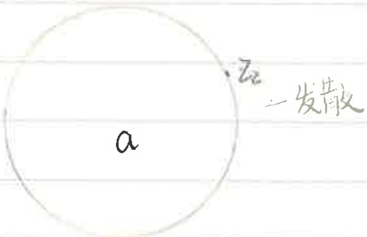
定理 4.11

如果幂级数在某点 z_1 收敛 $(z_1\neq a)$，则它必在圆 k：$|z-a|<|z_1-a|$ 内绝对收敛且内闭一致收敛.

幂级数是解析的（全平面上）？
多项式函数是整函数
逐项求导性的第一条
和函数是解析的

推论：

若幂级数在某点 z_2 发散 $(z_2\neq a)$，则它以 a 为圆心并通过 z_2 圆周外部发散.



幂级数和的解析性：

幂级数的和函数唯一确定

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的和函数 $f(z)$ 在收敛圆 k：$|z-a|<R$ 内解析.

(2) $f'(z)=c_1+2c_2(z-a)+\cdots+nc_n(z-a)^{n-1}+\cdots$

$f''(z)=2c_2+3\cdot2\,c_3(z-a)+\cdots+n(n-1)c_n(z-a)^{n-2}+\cdots$

$\cdots$

$f^{(p)}(z)=p!c_p+(p+1)p\cdots 2c_{p+1}(z-a)+\cdots+n(n-1)\cdots(n-p+1)c_n(z-a)^{n-p}+\cdots$

幂级数可以逐项求导至任意阶.

(3) 令 $z=a$, $c_0=f(a)$

$c_1=f'(a)$

$c_2=\frac{1}{2!}f''(a)$, $\cdots$, $c_p=\frac{1}{p!}f^{(p)}(a)$, $\cdots$

§2 $\Leftrightarrow$ §3

§3 解析函数的泰勒(Taylor)展式

主要研究在圆内解析的函数展开成幂级数的问题.

Taylor定理

设$f(z)$在D内解析，$a\in D$，$R>0$，$|z-a|<R\subset D$

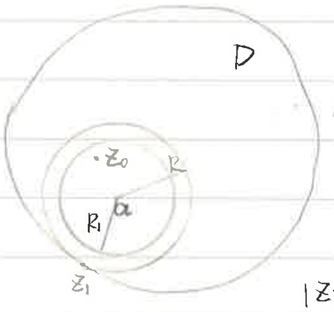
则存在 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 使 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$，$|z-a|<R$

其中 $C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$，$n=0,1,2,\cdots\cdots$

且展式唯一.　　微分

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

(积分)



由于z处不知其解析、连续定义

$|z-a|\le R_1$ ← 研究

$|z-a|<R$

证明: $\Leftrightarrow$ $\forall z_0: |z_0-a|<R$，有

$$f(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z_0-a)^n$$

取R_1，$R_1<R$，且 $|z-a|\le R_1\subset D$

$f(z)$在D内解析,由柯西积分公式:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

找一个圆 $|z-a|=R_1$，使z_0在其内!!!

$|z_0-a|<|z-a|$

$$\because \frac{1}{z-z_0}=\frac{1}{(z-a)-(z_0-a)}$$

$$=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_0-a}{z-a}}\qquad (q<1)$$

$\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ (内闭一致收敛)

$$=\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n$$

$\times\frac{1}{z-a}$　$\frac{1}{|z-a|}=\frac{1}{R_1}$ (有界量)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}(z_0-a)^n.$$

$$\therefore f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}(z_0-a)^n dz$$

$\times f(z)$　$|f(z)|$ 有界

($f(z)$连续)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R_1}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz}_{C_n}\Big)(z_0-a)^n$$

逐项可积　Σ与$\int$交换

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z_0-a)^n.$$

其中 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R_1}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$ 　高阶无穷可微性

$=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$

下证唯一性:

若∃ $\sum_{n=0}^{\infty}C_n'(z-a)^n$，使 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n'(z-a)^n$. $|z-a|<R$ 　运用§2. 换角度

则 $C_n'=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=C_n$ 　级数→和函数.

几个常用的展式:

1. $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+z^3+\cdots$ 　$|z|<1$
2. $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ ， $|z|<\infty$
3. $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$ ，$|z|<+\infty$

   $=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$
4. $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$ ，$|z|<+\infty$

   $=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\cdots$
5. $(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$ 　$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}$

$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n$

$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\cdots+(-1)^nz^{2n}+\cdots$

$\arctan z=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}+\cdots$ 　积分

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}$

$\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots$ 　求导

$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$

例1 $f(z)=\frac{z}{z+2}$ ，$z=1$

解：$f(z)=\frac{z}{z+2}$ 在 $z=-2$ 处不解析

故 $f(z)$ 在 $|z-1|<3$ 内解析.

$$\frac{z}{z+2}=1-\frac{2}{z+2}$$

$$=1-\frac{2}{3+(z-1)}$$

$$=1-\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$$

$$=1-\frac{2}{3}\left(1-\frac{z-1}{3}+\left(\frac{z-1}{3}\right)^2-\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^n}(z-1)^n+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}(z-1)^n$$

例2 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

解：$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ，$f'(0)=1$

令 $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ，$|x|<1$

$$g(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

$$C_n=\frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

$$g^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k-1\\ (-1)^k\cdot(2k)!, & n=2k\end{cases}$$

$$\therefore f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2k\\ (-1)^{k+1}(2k-1)! & n=2k-1\end{cases}$$

$$f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

§4 零点的孤立性和唯一性定理

定义：零点：

若$f(z)$在D内解析，$a\in D$，$f(a)=0$，则称a为$f(z)$的零点，且当$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，但$f^{(n)}(a)\neq0$时，$a$叫$f(z)$的$n$级零点。

例：$f(z)=z-\sin z$，$z=0$

$z=0$为3级零点

1. $z^2(e^{z^2}-1)$，$z=0$
2. $6\sin z^3+z^9-6z^3$，$z=0$

① a为$f(z)$的n级零点 $\Leftrightarrow f(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，但$f^{(n)}(a)\neq0$

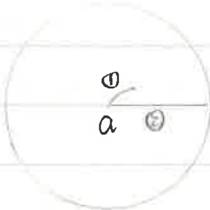
$\Leftrightarrow f(z)=(z-a)^n g(z)$，其中$g(z)$在$|z-a|<R$内解析

且$g(a)\neq0$

$\because g(a)=\lim\limits_{z\to a}g(z)\neq0$

$\therefore \exists R>0$，使$g(z)\neq0$，$\forall z$：$|z-a|<R$　　局部保号性

$\Rightarrow \exists R>0$，使$f(z)$在$|z-a|<R$内只有$z=a$一个零点。　　孤立性



$\Leftrightarrow f(z)$在$|z-a|<R$内解析，如果$\exists a_n$，使$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，而$f(a_n)=0$，则$f(z)$在$|z-a|<R$内恒为0.

零点列以a为聚点

（弧段①，实轴②（无穷点列））

$\Leftrightarrow f_1(z)$，$f_2(z)$在$|z-a|<R$内解析

$\exists a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，而$f_1(a_n)=f_2(a_n)$，$n=1,2,\cdots$　　（应用）

则$f_1(z)\equiv f_2(z)$，$\forall z$：$|z-a|<R$

两个函数在点列处函数值相等，则点列之外圆内所有点处也相等。

局限：只是在圆内趋于圆心的应用

扩大区域为D，D内任意点为聚点（趋于点），　孤立性 → 唯一性。

例1 $z^2(e^{z^2}-1)$，$z=0$

$$z^2(e^{z^2}-1)=z^2\left(1+z^2+\frac{1}{2!}z^4+\cdots+\frac{1}{n!}z^{2n}+\cdots-1\right)$$
$$=z^2\left(z^2+\frac{1}{2!}z^4+\cdots+\frac{1}{n!}z^{2n}+\cdots\right)$$
$$=z^4\left(1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^4+\cdots\right)$$

$g(z)=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^4+\cdots$

$g(z)$ 在 $|z-0|<R$ 上解析，且 $g(0)=1\neq0$

$z=0$ 为4级零点.

例2 $6\sin z^3+z^9-6z^3$，$z=0$

$$6\sin z^3+z^9-6z^3$$
$$=6\left(z^3-\frac{1}{3!}z^9+\frac{1}{5!}z^{15}-\frac{1}{7!}z^{21}+\cdots\right)+z^9-6z^3$$
$$=6z^3-z^9+6\left(\frac{1}{5!}z^{15}-\frac{1}{7!}z^{21}+\cdots\right)+z^9-6z^3$$
$$=\frac{6}{5!}z^{15}-\frac{6}{7!}z^{21}+\frac{6}{9!}z^{27}+\cdots$$
$$=z^{15}\left(\frac{6}{5!}-\frac{6}{7!}z^6+\frac{6}{9!}z^{12}+\cdots\right)$$

$g(z)=\frac{6}{5!}-\frac{6}{7!}z^6+\frac{6}{9!}z^{12}+\cdots$

$g(0)=\frac{6}{5!}\neq0$，$g(z)$ 在 $|z-0|<R$ 上解析　　$z=0$ 为15级零点.

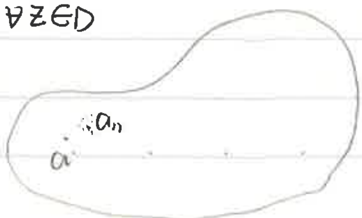
对①的分析：

$$f(z)=\overset{0}{f(a)}+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$
$$+C_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots$$
$$=(z-a)^n\left(C_n+C_{n+1}(z-a)+\cdots\right)$$

$g(z)=C_n+C_{n+1}(z-a)+C_{n+2}(z-a)^2+\cdots$

唯一性定理

$f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 D 内解析，$a\in D$，如果存在 $a_n\in D$，使 $a_n\to a$，而 $f_1(a_n)=f_2(a_n)$，$n=1,2,\cdots$　则 $f_1(z)\equiv f_2(z)$，$\forall z\in D$

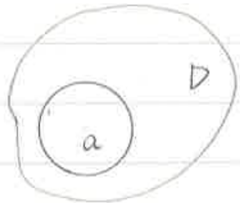


a 、 小弧段 → 为零点点列

a ⊙ 小区域

最大模原理

设$f(z)$在D内解析，则$|f(z)|$在D内任何点都不能取得最大值，除非$f(z)$在D内恒为常数.



$\Leftrightarrow$ …，$|f(z)|$在D内某一点可以取到最大值

则$f(z)$在D内恒为常数.

证明：设$M=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|$

若$\exists\, a\in D$，使$M=|f(a)|$，下证$f(z)$必为常数

(1) 取$R>0$，使$|z-a|\leq R\subset D$，则$f(z)$在$|z-a|\leq R$上解析

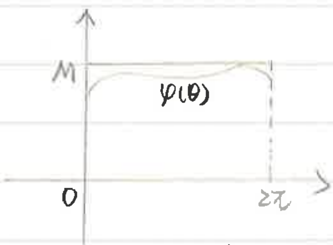
故 $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})\,d\theta$ | 平均值定理

$$M=|f(a)|$$
$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})\,d\theta\right|$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+Re^{i\theta})|\,d\theta$$

令$\phi(\theta)=|f(a+Re^{i\theta})|$，$\theta\in[0,2\pi]$，$0\leq\phi(\theta)\leq M$

在$[0,2\pi]$上连续

$\because \underbrace{M\cdot 2\pi}_{S_{矩形}}\leq\underbrace{\int_0^{2\pi}\phi(\theta)\,d\theta}_{S_{梯形}}$



$\therefore \phi(\theta)=M$，$\theta\in[0,2\pi]$

$\therefore |f(a+Re^{i\theta})|\equiv M$，$\forall\,\theta\in[0,2\pi]$ | 圆周上每一点函数值为M

(2) $\forall\, 0<r<R$，如上 $|f(a+re^{i\theta})|\equiv M$，$\forall\,\theta\in[0,2\pi]$

$\therefore |f(z)|\equiv M$，$\forall\, z\in\{z:|z-a|\leq R\}$.

$\therefore f(z)$在$|z-a|<R$内恒为常数C，$|C|=M$.

故由唯一性定理，$f(z)$在D内恒为常数.

P_{130}

11. (1) 在原点解析，而在 $z=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 处取下列各组值的函数是否存在？

0，1，0，1，0，1，⋯ 试证之.

证明：$f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析

$$f\left(\frac{1}{2k}\right)=0_{(1)},\quad f\left(\frac{1}{2k-1}\right)=1_{(2)},\quad k=1,2,3,\cdots$$

若存在，令 $g(z)=0$

则 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析

令 $z_n=\frac{1}{2n}$，$z_n\to 0$，$(n\to\infty)$.

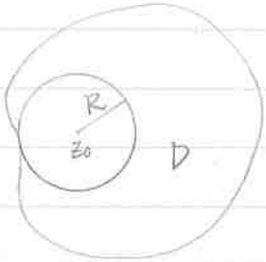
$$f(z_n)=g(z_n)=0,\ n=1,2,\cdots$$

则由唯一性定理得

$f(z)\equiv g(z)$，$\forall z\in \underbrace{|z|<R}_{D}$ | 由(1)，$f(z)$ 在D内恒为0

这与 $f\left(\frac{1}{2k-1}\right)=1$ 矛盾 | 由(2)，$f(z)$ 在D内恒为1

12. 设 (1) $f(z)$ 在区域D内解析 (2) 在某一点 $z_0\in D$，有 $f^{(n)}(z_0)=0$，$n=1,2,\cdots$，试证 $f(z)$ 在D内必为常数.



证明：$\exists z_0\in D$

$$f^{(n)}(z_0)=0,\ n=1,2,\cdots$$

取 $R>0$，使 $|z-z_0|<R\subset D$

则 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析

故 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，$|z-z_0|<R$ | 泰勒定理

其中 $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$，$n=0,1,2,\cdots$

$\because f^{(n)}(z_0)=0$，$n=1,2,\cdots$

$\therefore c_1=c_2=c_3=\cdots=c_n=\cdots=0$

$\therefore f(z)=c_0$，$|z-z_0|<R$

$\therefore$ 由唯一性定理 $f(z)\equiv C$，$\forall z\in D$.

如果f(z)在z_0处不解析，但在z_0的去心邻域内解析，试问f(z)在 $0<|z-z_0|<R$ 或 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 则能否展开为某种级数呢？

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{收敛}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{同时收敛}}$$

无首项，不能用部分和来定义收敛和发散.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

$\downarrow$ 收敛半径 R_1

收敛域 $|z-z_0|<R_1$

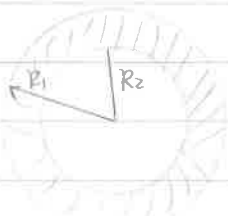
$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^{-n}$

$\downarrow$ 令 $\zeta=(z-z_0)^{-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n$

$\downarrow$ 收敛半径 R

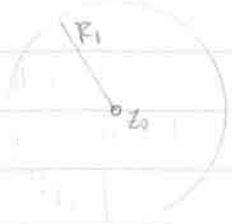
$|\zeta|<R$，收敛域 $|z-z_0|>\frac{1}{R}=R_2$



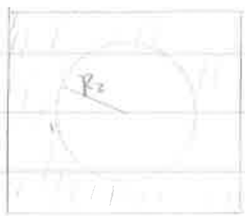
若：(1) $R_1<R_2$，两收敛域无公共部分，双边幂级数发散

(2) $R_1>R_2$，两收敛域有公共部分 $R_2<|z-z_0|<R_1$，级数绝对收敛.

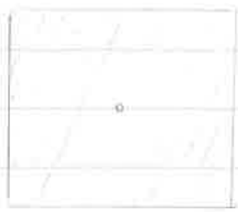
常见的特殊圆环域.



$0<|z-z_0|<R_1$



$R_2<|z-z_0|<\infty$



$0<|z-z_0|<\infty$

第五章 Laurent 级数和孤立奇点

§1 Laurent 级数

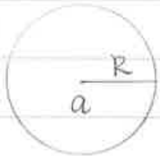
一. 双边幂级数 $= \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-a)^n$$

$$= \cdots + \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \cdots + C_n (z-a)^n + \cdots$$

✓ • $C_0 + C_1(z-a) + \cdots + C_n(z-a)^n + \cdots = h(z)$

(和函数)



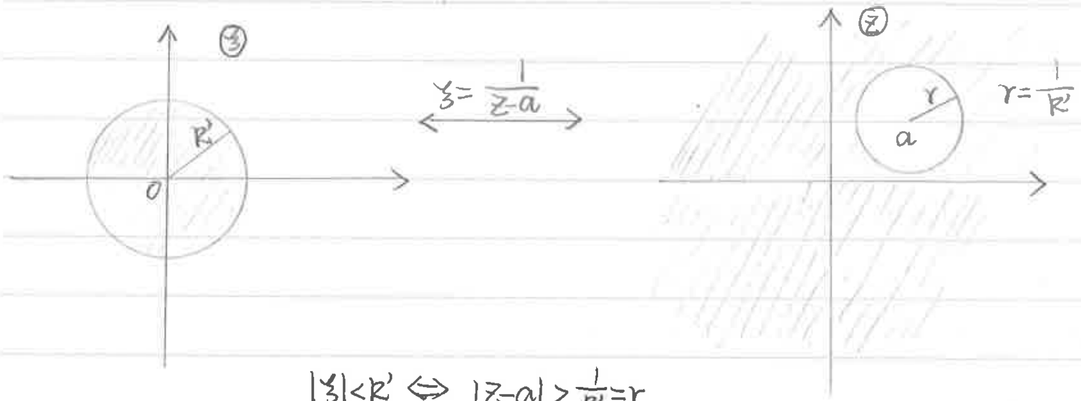
$h(z)$在$|z-a|<R$内解析.

◦ $\frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots$

$\underline{\zeta = \frac{1}{z-a}}$ $C_{-1}\zeta + C_{-2}\zeta^2 + \cdots + C_{-n}\zeta^n + \cdots = g(\zeta)$

<u>分析</u>: 令 $\zeta = \frac{1}{z-a}$, $\exists R'>0$, 使 $|\zeta|<R'$ 内 $C_{-1}\zeta + C_{-2}\zeta^2 + \cdots + C_{-n}\zeta^n + \cdots = g(\zeta)$

以原点为圆心 (和函数)



$|\zeta|<R' \Leftrightarrow |z-a| > \frac{1}{R'} = r$

(收敛圆) (收敛区域)

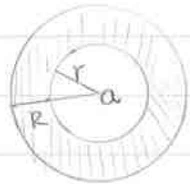
通过变量代换, 将负幂级数转换为幂级数研究.

所以 $\frac{C_{-1}}{z-a} + \cdots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots = g\left(\frac{1}{z-a}\right) = g'(z)$ (不是导数) $|z-a|>r=\frac{1}{R'}$

$= f(z)$

当 $r<R$ 时，$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 在 $r<|z-a|<R$ 内收敛于一个解析函数 $f(z)$

$(h(z)+l(z))$



绝对收敛且内闭一致收敛

（$h(z)$, $l(z)$ 都成立，故之和成立）

二. Laurent 定理

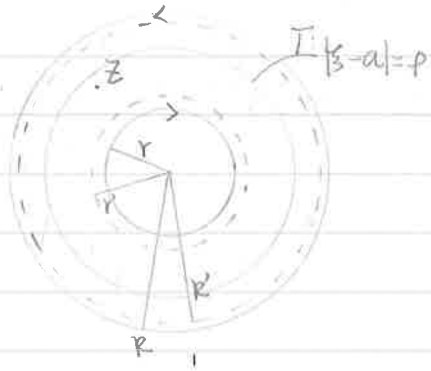
- 设 $f(z)$ 在 $r<|z-a|<R$ 内解析，则存在 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 使 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n$

$r<|z-a|<R$.

其中 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$，$r<\rho<R$

$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

且展式唯一



·(1) 柯西积分公式

·(2) 逐项可积

·(3) 复周线的柯西积分定理

证：设 z 为圆环内任意取定的点

$\forall z$：$r<|z-a|<R$

$\exists r', R'$，使 $r'\le|z-a|\le R'$，$r'>r$，$R'<R$

$f(z)$ 在 $r'\le|z-a|\le R'$ 上解析．在 $\Gamma_{R'}$、$\Gamma_{r'}$ 上连续

圆环上性质未知

$\Gamma_{R'}$：$|\zeta-a|=R'$　　$\Gamma_{r'}$：$|\zeta-a|=r'$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R'}+\Gamma_{r'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad \text{(柯西积分公式)}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta}_{①\text{泰勒定理}\ |z-a|<R'}-\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta}_{②\text{需分析}}\quad |z-a|>r'$$

(1) 柯西积分公式

（圆内点值由圆周上表示）

（涉及到圆外的点用圆周上表示）？

负号因为方向．

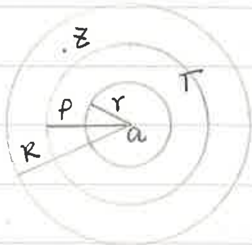
$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = -\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}$$

(2) 逐项可积 (P135)

(3) 由复周线的柯西积分定理

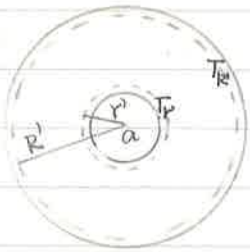
$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta$$



$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta$$



z: 圆环中任意取定的点

Γ: 圆环周 $|\zeta-a|=\rho$ $(r<\rho<R)$.

三、Taylor 展式与 Lanrent 展式的关系

Lanrent 定理:

$f(z)$在 $r<|z-a|<R$ 内解析，则 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n$, $r<|z-a|<R$

$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$, $n=0,\pm1,\pm2\cdots$

1→2

当$f(z)$在$|z-a|<R$内解析，Lanrent展式为

由柯西积分定理，$C_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz = 0$

$C_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}(z-a)f(z)\,dz = 0$

…

$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^{n-1}f(z)\,dz = 0$

圆看成圆环特殊情形

$C_n=0$, $n=1,2,3,\cdots$

- 结论

(1) Taylor 展式是 Lanrent 展式的

Lanrent 展式是 Taylor 展式的

(2) 两个定理均刻画了解析函数

- Lanrent 展式用途

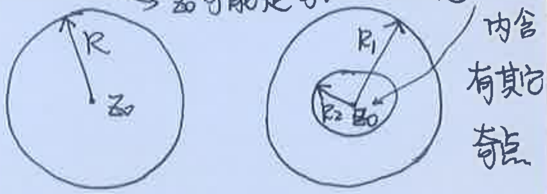
研究孤立奇点的性质.

系数公式不同

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

$$\neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

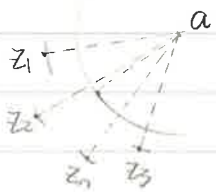
z_0 可能是奇点, 在自己区域内含有其它奇点



四、解析函数在孤立奇点邻域内的

a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 即

$f(z)$ 在 $0<|z-a|<R_{max}$ 内解析, 则称 $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R_{max}$ 内的 Lanrent 展式为 $f(z)$ 在 $z=a$ 处的 Lanrent 展式.



· 求奇点

$a, z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为 $f(z)$ 奇点

$R_{max}=\min\{|z_1-a|, |z_2-a|, \cdots, |z_n-a|\}$.

例 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$

① $0<|z|<1$, $|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}$$
$$=-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$
$$=-\frac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)$$
$$=-(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots)$$
$$=-\sum_{n=-1}^{\infty}z^n$$

- $f(z)$ 在 $z=0$ 处的 Lanrent 展式.

② $1<|z|<+\infty$

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$
$$=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$$
$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots+\cdots$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=-\infty}^{-2}z^n$$

∘ $f(z)$在 $1<|z|<+\infty$ 的 Lanrent 展式.

③ $0<|z-1|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}$$
$$=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$
$$=\frac{1}{z-1}\left(1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{z-1}-1+(z-1)-(z-1)^2+\cdots$$
$$=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n$$

∘ $f(z)$在 $z=1$处的 Lanrent 展式.

④ $1<|z-1|<+\infty$

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}$$
$$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}$$
$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-1}\right)^n$$
$$=\frac{1}{(z-1)^2}\left(1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^4}-\frac{1}{(z-1)^5}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+2}}+\cdots$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}.$$

§2 解析函数孤立奇点

a为f(z)的孤立奇点，则 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n$

$$=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-a)^n}_{A}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n}$$

主要部分　　正则(解析)部分

定义:

① 称a为f(z)的可去奇点 $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ $A=0$

② 称a为f(z)的m级极点 $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ $A=\frac{C_1}{z-a}+\cdots+\frac{C_m}{(z-a)^m}$ ，$C_m\neq 0$

③ 称a为f(z)的本质(性)奇点 $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ A为无穷多项

一、可去奇点

a为f(z)的可去奇点 $\Leftrightarrow$ ① $A=0$;

$\Leftrightarrow$ ② $\lim_{z\to a} f(z)=b$ $(b\neq\infty)$;

$\Leftrightarrow$ ③ f(z)在a的某去心邻域内有界.

证明: ①⇒②:

$$f(z)=C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\cdots \quad (0<|z-a|<R)$$

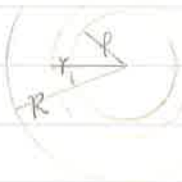
于是 $\lim_{z\to a} f(z)=C_0$ $(\neq\infty)$

②⇒③: ✓

③⇒①: $\exists M>0$，使 $|f(z)|\leq M$ ，$0<|z-a|<r$

$\because$ $C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$ ，$\forall\rho$: $0<\rho<r$

$\therefore$ $|C_1|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz\right|$



$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|z-a|=\rho} M ds=M\rho$$

令 $\rho\to0^+$，得 $C_1=0$ ┆ 证复数为0 $\Leftrightarrow$ 模为0.

$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz$ 不可利用柯西积分公式得出其值如.

$|C_{-2}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}(z-a)f(z)\,dz\right|$

$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z-a|=\rho}\rho M\,ds = M\rho^2$

…… ……

$|C_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^{n-1}f(z)\,dz\right|$

$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z-a|=\rho}\rho^{n-1}M\,ds = M\rho^n$

$\therefore A=0$

二、极点

定理：a为$f(z)$的m级极点 $\Leftrightarrow$

① $A=\frac{C_{-1}}{z-a}+\cdots+\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}$，$C_{-m}\neq 0$

② $f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$，$g(z)$在$a$的某邻域内解析，且$g(a)\neq 0$.

③ $\frac{1}{f(z)}$以a为m级零点

④ $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=b$ $(b\neq 0,\infty)$.

证明：①⇒②：

$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\cdots$

$=\frac{C_{-m}+C_{-(m-1)}(z-a)+\cdots+C_0(z-a)^m+\cdots}{(z-a)^m}$

$$= \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

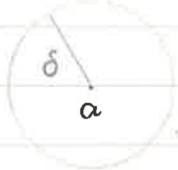
由魏尔斯特拉斯定理，$g(z)$在点a的某邻域内解析，且$g(a)=C_m \neq 0$.

②⇒③:

$\because g(a)=\lim\limits_{z\to a} g(z) \neq 0$

$\therefore \exists \delta>0$，使$g(z)\neq 0$，$\forall z: |z-a|<\delta$　　(局部保号性)

$\therefore \dfrac{1}{f(z)} = (z-a)^m \cdot \dfrac{1}{g(z)} = (z-a)^m h(z)$



$h(z)$在$|z-a|<\delta$内解析

$h(a)=\dfrac{1}{g(a)} \neq 0$

$\therefore \dfrac{1}{f(z)}$以点$a$为$m$级零点

③⇒④

$\because \dfrac{1}{f(z)} = (z-a)^m \cdot h(z)$

$\therefore (z-a)^m f(z) = \dfrac{1}{h(z)}$

$\therefore \lim\limits_{z\to a} (z-a)^m f(z) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{h(z)} = \dfrac{1}{h(a)} = b \quad (\neq 0, \infty)$

④⇒①:

$\because \lim\limits_{z\to a} (z-a)^m f(z) = b \quad (\neq 0, \infty)$

$\therefore z=a$为$(z-a)^m f(z)$的可去奇点

$\therefore (z-a)^m f(z) = C_0' + C_1'(z-a) + \cdots + C_n'(z-a)^n + \cdots$　　$C_0'=b\neq 0$.

$\therefore f(z) = \dfrac{C_0'}{(z-a)^m} + \dfrac{C_1'}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \dfrac{C_{m-1}'}{z-a} + C_m' + C_{m+1}'(z-a) + \cdots$

$\therefore A = \dfrac{C_0'}{(z-a)^m} + \cdots + \dfrac{C_{m-1}'}{z-a}$，$C_0'=b\neq 0$

推论：

a为$f(z)$极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

例 $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{e^z-1}$　　$(g+h)$型

解：$f(z)$的孤立奇点为 $a_k=2k\pi i$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(1) $z=0$ $(k=0)$

$$\lim_{z\to0}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{e^z-1}\right)=\lim_{z\to0}\frac{e^z-z-1}{z(e^z-1)}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{e^z-1+ze^z}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{e^z}{e^z+ze^z+e^z}$$

$$=\frac{1}{2}$$

所以 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点

(2) $z=2k\pi i$，$k\neq0$

$\frac{1}{z}$在a_k解析，所以 $\frac{1}{z}-\frac{1}{e^z-1}$ 在 $z=a_k$ $(k\neq0)$ 处孤立奇点类型等同于

$h(z)=\frac{1}{e^z-1}$，$a_k=2k\pi i$

令 $g(z)=\dfrac{1}{\frac{1}{e^z-1}}=e^z-1$

$g(a_k)=0$　　　　判断零点

$g'(a_k)=1\neq0$

或 $\lim\limits_{z\to a_k}(z-a_k)h(z)=\lim\limits_{z\to a_k}\dfrac{z-a_k}{e^z-1}$

$$=\lim_{z\to a_k}\frac{1}{e^z}=1$$

计算极限

$\therefore$ $z=\overset{=2k\pi i}{a_k}$ $(k\neq0)$ 为 $f(z)$ 的一级极点.

P_{143} 例 5.8　　$f(z)=\dfrac{5z+1}{(z-1)(2z+1)^2}$

三、本质奇点

a为$f(z)$本质奇点 $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ A为无穷多项 (可以展洛朗展式去判断)

$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)$不存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a}\frac{1}{f(z)}$ 不存在.

$\Leftrightarrow$ a为$\frac{1}{f(z)}$的本质奇点

Weierstrass 定理:

设$z=a$为$f(z)$的本质奇点，则$\forall A\in \mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，都$\exists z_n$，$z_n\to a$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z)=A$

$f(\mathring{B}(a,\delta))=\mathbb{C}_\infty$

Picard 定理

$\forall A\in \mathbb{C}_\infty$，但$A\neq A_0, A_1$，$\exists z_n$，$z_n\to a$，$f(z_n)=A$

$f(\mathring{B}(a,\delta))=\mathbb{C}_\infty$

Weierstrass定理的证明:

证明：1° 先证$A=\infty$时定理成立

因为 a为$f(z)$的本质奇点

所以$f(z)$在a的任意去心邻域内无界，否则a必为$f(z)$的可去奇点.

而$\forall n$，$\exists z_n$，$0<|z_n-a|<\frac{1}{n}$，使

$$|f(z_n)|\geq n \qquad n=1,2,\cdots$$

即 $z_n\to a$，而$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$.

$2°$ $A\in\mathbb{C}_\infty$, $A\neq\infty$

因为 a 为 $f(z)$ 的本质奇点

所以 a 也是 $f(z)-A$ 的本质奇点

则 a 也是 $\phi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$ 的本质奇点

由 $1°$

$\exists z_n$, $z_n\to a$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi(z_n)=\infty$

$$\phi(z_n)=\frac{1}{f(z_n)-A}\to\infty \quad\Leftrightarrow\quad f(z_n)\to A$$

例：$f(z)=\sin\frac{1}{z}$，$z=0$，$0<|z|<+\infty$

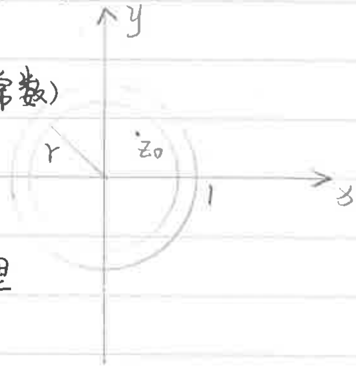
$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}$$

$\therefore$ $z=0$ 为 $\sin\frac{1}{z}$ 的本质奇点.

Schwartz 引理 (Lemma)

设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$f(0)=0$，$|f(z)|<1$，$|z|<1$，则 $\forall z$: $|z|<1$，有 $|f(z)|\leq|z|$，且 $|f'(0)|\leq1$.

上面等式成立 $\Leftrightarrow$ $f(z)=e^{i\alpha}z$.（α 为一实常数）



证明：$f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析　　· 泰勒定理

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$，$|z|<1$

$C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，$n=0,1,2,\cdots$

即 $f(z)=\underset{C_1}{f'(0)}z+\underset{C_2}{\frac{f''(0)}{2!}}z^2+\cdots+\underset{C_n}{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}z^n+\cdots$　　· $f(0)=0$

当 $z\neq0$，令 $\phi(z)=\frac{f(z)}{z}=C_1+C_2z+\cdots$　　$0<|z|<1$

补充定义 $\phi(0)=C_1=f'(0)$　　· $z=0$ 为可去奇点.

所以 $\phi(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$r<1$，在 $|z|\leq r$ 内解析.

(1) $\forall z_0$: $0<|z_0|<r<1$，$\forall\ 0<r<1$

$$|\phi(z_0)| = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} \le \max_{|z|\le r} |\phi(z)|$$

$$= \max_{|z|=r} |\phi(z)|$$ · 最大模原理

$$= \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \le \frac{1}{r}$$

(2) 对 $z_0=0$，$|\phi(z_0)| = |f'(0)| \le \max_{|z|=r} |\phi(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \le \frac{1}{r}$

令 $r \to 1^-$，$|\phi(z_0)| \le 1$

$\therefore |f(z_0)| \le |z_0|$，$\forall z_0 : 0<|z_0|<r<1$

$|f'(0)| \le 1$，$z_0=0$

上式取等号，意味着在单位圆 $|z|<1$ 内的某一点 z_0，$|\phi(z)|$ 取最大

由最大模原理）$\phi(z_0) \equiv C$，$\forall z_0$

$|C|=1$

$C = e^{i\alpha}$

$\therefore \phi(z_0) = e^{i\alpha}$

即 $f(z_0) = e^{i\alpha} z_0$，$\forall z_0$

P_{144}.

§3 解析函数在∞处的性质

$f(z)$ 在 $R_{min}<|z|<+\infty$

（离原点最远的最大去心圆的外部）

内解析，称∞为 $f(z)$ 的孤立奇点

则 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}C_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_n z^n$

$$=(\cdots+\frac{C_{-m}}{z^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z}+C_0)+\underbrace{C_1 z+C_2 z^2+\cdots}_{A}$$

称为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的 Lanrent 展式.

↑

（∞点处 Lanrent 展式的定义）

定义：称∞为 $f(z)$ 可去奇点 $\Leftrightarrow A=0$

∞为 $f(z)$ 的m级极点 $\Leftrightarrow \underline{A=C_1z+\cdots+C_mz^m}$，$C_m\neq0$

∞为 $f(z)$ 的本质奇点 $\Leftrightarrow$ A为无穷多项.

1、$z=\infty$ 为 $f(z)$ 可去奇点 $\Leftrightarrow A=0$

$\Leftrightarrow \lim_{z\to\infty}f(z)=b \quad (b\neq\infty)$

$\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在∞某去心邻域内有界

2、$z=\infty$ 为 $f(z)$ 的m级极点 $\Leftrightarrow$

① $A=C_1z+C_2z^2+\cdots+C_mz^m$，$C_m\neq0$.

② $f(z)=z^m g(z)$，$g(z)$ 在∞的某个去心邻域内解析，且 $g(\infty)\neq0$

③ $\frac{1}{f(z)}$ 以∞为m级零点

④ $\lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{z^m}f(z)\right)=b \quad (b\neq0,\infty)$

∞为 $f(z)$ 的极点 $\Leftrightarrow \lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

P149 例 函数 $f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有些什么类型的奇点？若是极点，指出其阶.

$$f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$$

$$=\frac{(z-1)(z+1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$$

$f(z)$ 的奇点为 $z_k=k$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

∞，

∞ 为 $f(z)$ 的非孤立奇点，因 $z_k\to\infty\ (k\to\infty)$ · ∞ 的任何邻域内都有奇点.

(1) $z=1$ 的奇点类型

$$\lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z+1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}=-2\lim_{z\to1}\frac{z-1}{(\sin\pi z)^3}$$

$$=-2\lim_{z\to1}\frac{1}{3(\sin\pi z)^2\cos\pi z\cdot\pi}$$ ·洛必达

$$=\infty$$

$$\lim_{z\to1}(z-1)^2f(z)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)^3(z+1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$$ · 判断极点阶数.

$$=-2\lim_{z\to1}\frac{(z-1)^3}{(\sin\pi z)^3}$$

$$=-2\lim_{z\to1}\frac{3(z-1)^2}{3(\sin\pi z)^2\cos\pi z\cdot\pi}$$

$$=+\frac{2}{\pi}\lim_{z\to1}\frac{(z-1)^2}{(\sin\pi z)^2}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{z\to1}\frac{2(z-1)}{2\sin\pi z\cdot\cos\pi z\cdot\pi}$$

$$=-\frac{2}{\pi^2}\lim_{z\to1}\frac{z-1}{\sin\pi z}$$

$$=-\frac{2}{\pi^2}\lim_{z\to1}\frac{1}{\cos\pi z\cdot\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi^3}$$

所以 $z=1$ 为 $f(z)$ 的 2 级极点.

(2) $z=-1$ 的奇点类型

同理可得 $z=-1$ 为 $f(z)$ 的2级极点.

(3) $z=2$ 的奇点类型

$$\lim_{z\to 2} f(z) = 3\lim_{z\to 2}\frac{(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$$

$$= 3\lim_{z\to 2}\frac{3(z-2)^2}{3(\sin\pi z)^2\cdot\cos\pi z\cdot\pi}$$

$$= \frac{3}{\pi}\lim_{z\to 2}\frac{(z-2)^2}{(\sin\pi z)^2}$$

$$= \frac{3}{\pi}\lim_{z\to 2}\frac{2(z-2)}{2\sin\pi z\cdot\cos\pi z\cdot\pi}$$

$$= \frac{3}{\pi^2}\lim_{z\to 2}\frac{z-2}{\sin\pi z}$$

$$= \frac{3}{\pi^2}\lim_{z\to 2}\frac{1}{\cos\pi z\cdot\pi}$$

$$= \frac{3}{\pi^3}$$

$z=2$ 为 $f(z)$ 的可去奇点.

(4) $z=0$, $z=-2$, $z=k$, $k=\pm3, \pm4, \cdots$ 的奇点类型

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z^2-1)(z-2)^3}\quad(\sin\pi z)^3$$

$z=0$, $z=-2$, $z=k$, $k=\pm3, \pm4, \cdots$ 为 $(\sin\pi z)^3$ 的3极零点

$\cdots$ $\cdots$ $,\cdots$ 为 $f(z)$ $\cdots$ 3极极点

§4 整函数与亚纯函数

1. 整函数

$f(z)$在z平面上解析，$|z|<+\infty$

$f(z)$在$|z|<\infty$内的泰勒展式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
也称为$f(z)$在$z=\infty$处的洛朗展式.

- 整函数 $\begin{cases} \text{多项式}\ (\infty\text{为极点或可去奇点}) \\ \text{超越整函数}\ (\infty\text{为本质奇点}) \end{cases}$

故多项式的自然推广为整函数.

定理：若$f(z)$为一整函数

(1) $z=\infty$为整函数$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$为常数 (0次多项式)

(2) $z=\infty$为$f(z)$的m极极点 $\Leftrightarrow$ $f(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_mz^m$，$c_m\neq 0$
(m次多项式)

(3) $z=\infty$为$f(z)$的本质奇点 $\Leftrightarrow$ 展式有无穷多个c_n不等于零
(超越整函数)

2. 亚纯函数

$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$，$Q(z)$为多项式
$(P,Q)=1$

$Q(z)=0$，$a_1, a_2, \cdots, a_k, \infty$

定义：如果$f(z)$在z平面上除极点外无其它类型的奇点，则称$f(z)$为一个亚纯函数.
(不含∞)

整函数为亚纯函数的特例.

注：可去奇点既然可以除去后成为解析点，在定义及定理的条件中，一般就都不会提到它。

定理 $f(z)$为有理函数 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在$\mathbb{C}_\infty$上除极点外无其他类型奇点.

证明："$\Rightarrow$"：$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$, $Q(z)$为多项式，且$(P,Q)=1$ P_{152}

"$\Leftarrow$"：

已知$f(z)$在$\mathbb{C}_\infty$上除极点外无其它类型奇点

则$f(z)$的有限奇点只能有有限多个

(否则，这些极点在扩充z平面上的聚点就是$f(z)$的非孤立奇点)

(① 无穷多个，无界，∞为非孤立奇点

② 无穷多个，有界，聚点为非孤立奇点)

且都是极点

设为$a_1, a_2, \cdots, a_m$，且相应级数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$

则$(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots(z-a_m)^{\alpha_m}f(z)=g(z)$ ·(去掉奇性)

所以$g(z)$为整函数

且$z=\infty$为$g(z)$的n级极点

$g(z)=b_nz^n+\cdots+b_1z+b_0$，$b_n\neq 0$

$$\therefore f(z)=\frac{b_nz^n+\cdots+b_1z+b_0}{(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots(z-a_m)^{\alpha_m}}$$

则$f(z)$为有理函数.

亚纯函数 { 有理函数 $z=\infty$为极点

超越亚纯函数 $z=\infty$为本质奇点

例：$f(z)$为单叶整函数 $\Leftrightarrow$ $f(z)=az+b$，$a\neq 0$

证明"$\Leftarrow$" $\forall z_1, z_2$

$f(z_1)-f(z_2)=a(z_1-z_2)\neq 0$

$f(z_1)\neq f(z_2)$

所以$f(z)=az+b$为单叶整函数

"$\Rightarrow$" 设$f(z)$在$\mathbb{C}$上解析，且单叶

(1) 先证$f(z)$不恒为常数

若$f(z)=c$，则与$f(z)$的单叶条件矛盾

(2) 再证$f(z)$不是超越整函数，否则 $z=\infty$ 为$f(z)$的本质奇点

由Picard定理

取$A\in\mathbb{C}$，$\exists z_n$，$z_n\to\infty$ 且$f(z_n)=A$，$n=1,2\cdots$

这与单叶矛盾

$\therefore f(z)$不能为超越整函数

故$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$，$a_n\neq0$

(3) 若$n\geq2$，令

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

则$\exists$ $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 使

$f(z_k)=0$，$k=1,2,\cdots,n$　　　　·代数学基本定理

这与单叶性矛盾

则 $n=1$

即$f(z)=a_1z+a_0$，$a_1\neq0$.

P158 Ex 8　试证在扩充z平面上解析的函数$f(z)$必为常数（刘维尔定理）

有界整函数必为常数.

$f(z)$在$\mathbb{C}$上解析且$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点.

则存在$R>0$，使

$$|f(z)|\leq M_1,\quad R<|z|<\infty$$

又因为$f(z)$在$|z|\leq R$内连续

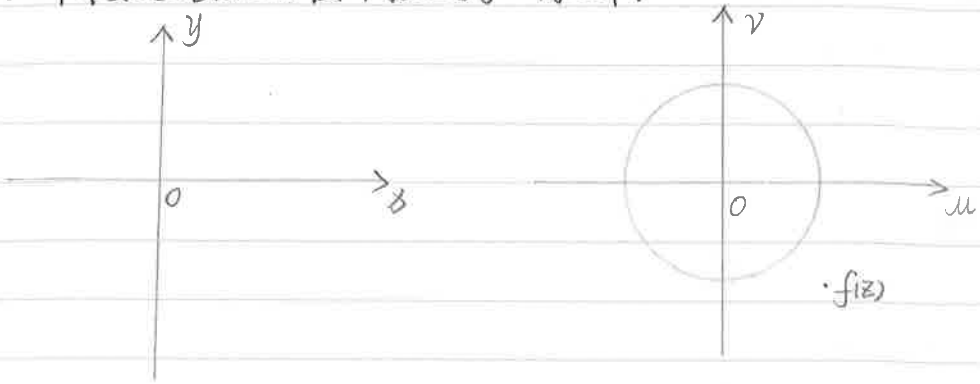
所以$\exists M_2>0$，使

$$|f(z)|\leq M_2,\quad |z|\leq R$$

令 $M=\max\{M_1,M_2\}$，则 $|f(z)|\leq M$，$|z|<\infty$

故$f(z)$必为常数.

Ex 9 刘维尔定理的几何意义是“非常数整函数的值不能全含于一圆之内”，试证非常数整函数的值不能全含于一圆之外.



证: $f(z)$ 为一非常数整函数

$\exists R>0$，使

$$|f(z)|>R,\ \forall z\in\mathbb{C}$$

令 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$

则 $g(z)$ 为整函数，且 $|g(z)|<\dfrac{1}{R}$

与非常数整函数的值不能全含于一圆之内相矛盾.

Ex 8 (二) 试证在扩充 z 平面上只有一个一阶极点的解析函数 $f(z)$ 必有如下形式：

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0\quad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0\right)$$

即证 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有一个一级极点 $\Leftrightarrow f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

证:“$\Leftarrow$” $c\neq 0$，$z=-\dfrac{d}{c}$ 为 $f(z)$ 的一级极点

$c=0$，$f(z)=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$，$\dfrac{a}{d}\neq 0$

则 $f(z)$ 以 $z=\infty$ 为一级极点

“$\Rightarrow$” 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有一个一级极点 a $\left(\begin{matrix} a\neq\infty \\ a=\infty \end{matrix}\right)$

$f(z)$ 在 $z=a$ 处 Laurent 展式的主要部分为

$$g(z)=\begin{cases} \dfrac{C_1}{z-a}, & C_1\neq 0,\quad a\neq\infty \\ C_1 z, & C_1\neq 0,\quad a=\infty \end{cases}$$

所以 $f(z)-g(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上解析

由 Liouville 定理

$$f(z)-g(z)=C_0$$

所以 $f(z)=C_0+g(z)=\begin{cases} C_0+\dfrac{C_1}{z-a}, & a\neq\infty \\ C_0+C_1 z, & a=\infty \end{cases}$

$a=\infty$ 时，$\begin{vmatrix} C_1 & C_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=C_1\neq 0$

$a\neq\infty$ 时，$\begin{vmatrix} C_0 & -C_0a+C_1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}=-C_1\neq 0$

例：求 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} ne^{-|n|}z^n$ 的收敛域.

解：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-|n|}z^n \Rightarrow R_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{e^n}\cdot\dfrac{e^{n+1}}{n+1}=e$

当 $|z|<R_1=e$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}z^n$ 收敛

令 $m=-n$，$\zeta=\dfrac{1}{z}$

$\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} ne^{-|n|}z^n=-\sum\limits_{m=1}^{+\infty} me^{-m}z^{-m}=-\sum\limits_{m=1}^{+\infty} me^{-m}\zeta^m \Rightarrow R_2=e$

当 $|\zeta|<R_2=e$ 时，即当 $|z|>\dfrac{1}{e}$ 时，$\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} ne^{-|n|}z^n$ 收敛

故 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} ne^{-|n|}z^n$ 的收敛域为 $\dfrac{1}{e}<|z|<e$.

第六章 留数理论及其应用

§1 留数

定义：

设z_0是$f(z)$的孤立奇点，我们把$f(z)$在z_0的去心邻域内Laurent展式两端沿C逐项积分留下的积分值除以$2\pi i$后得到的数，称为$f(z)$在z_0点的留数.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

$$\oint_C f(z)dz=\cdots+C_{-n}\oint_C(z-z_0)^{-n}dz+\cdots+C_{-1}\oint_C(z-z_0)^{-1}dz$$
$$+\oint_C C_0\,dz+\oint_C C_1(z-z_0)dz+\cdots+\oint_C C_n(z-z_0)^n dz+\cdots$$

C_{-1}是已知的，在这里只是赋予了新含义、新概念、

· 将级数理论和积分理论结合起来

$f(z)$在$0<|z-a|<R_{max}$内解析，则

$$f(z)=\cdots+\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\cdots$$

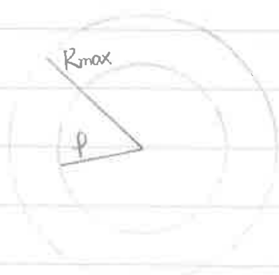
$$\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz=\underline{C_{-1}}\cdot 2\pi i$$ 根据公式3的推广，$n\neq 1$，$n\in\mathbb{Z}$（整数）其余各项为0

定义：

称C_{-1}为$f(z)$在a点的留数（Residue）

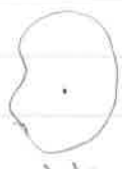
残数

记为 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$ 或 $\operatorname{Res}[f(z);a]$



R_{max}：以R_{max}为半径的圆周上存在$f(z)$的奇点

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz$$



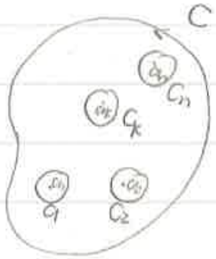
公式3

$0<\rho<R$

留数是计算复积分的重要工具.

Cauchy 留数定理

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$



$$\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

例: $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,dz.$

(1) 高阶导数公式

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0}$$

$$= -\pi i$$

(2) 洛朗展式求留数

$f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ 在 $0<|z|<\infty$ 内解析

且

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{4!}z-\cdots$$

所以

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\pi i$$

例 $\int_{|z|=10} \frac{1}{e^z-1}dz$

$f(z)=\frac{1}{e^z-1}$, $z_k=2k\pi i$, $k=0,\pm1,\pm2\cdots$

0, $2\pi i$, $-2\pi i$ 在 $|z|=10$ 内

需求 $0<|z|<2\pi$, $0<|z-2\pi i|<2\pi$, $0<|z+2\pi i|<2\pi$

的洛朗级数求留数很困难.

(1) $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$, a 为 $f(z)$ 的一阶极点

$2k\pi i$ 为 $f(z)$ 的一阶极点

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{e^z-1} = \lim_{z\to0}\frac{z}{e^z-1} = \lim_{z\to0}\frac{1}{e^z}=1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2\pi i}\frac{1}{e^z-1} = \lim_{z\to0}\frac{z-2\pi i}{e^z-1} = \lim_{z\to0}\frac{1}{e^z}=1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2\pi i}\frac{1}{e^z-1} = \lim_{z\to0}\frac{z+2\pi i}{e^z-1} = \lim_{z\to0}\frac{1}{e^z}=1$$

由 Cauchy 留数定理

$$\int_{|z|=10}\frac{1}{e^z-1}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{e^z-1}+\operatorname*{Res}_{z=2\pi i}\frac{1}{e^z-1}+\operatorname*{Res}_{z=-2\pi i}\frac{1}{e^z-1}\right)$$

$$= 2\pi i\cdot 3$$

$$=6\pi i$$

(2) $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

$$\operatorname*{Res}_{z=2\pi i}\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{e^{2\pi i}} = 1$$

留数的计算公式

一. a为$f(z)$的可去奇点

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=0$$

二. a为$f(z)$的m级极点，则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}$

证明:

$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$，$g(z)$在 $|z-a|<\delta$ 内解析，且$g(a)\neq 0$

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) &= C_{-1}\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{g(z)}{(z-a)^m}\,dz\\ &=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi i}{(m-1)!}\,g^{(m-1)}(a)\\ &=\frac{1}{(m-1)!}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}_{z=a}\\ &=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}\end{aligned}$$

1° a为$f(z)$的1级极点，则

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) &= \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\\ &=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\phi(z)}{g(z)}\\ &=\lim_{z\to a}\frac{\phi(z)}{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}}\end{aligned}$$

2° a为$f(z)$的2级极点

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}\left[(z-a)^2 f(z)\right]'$$

3° a为$f(z)$的一级极点　（a为$g(z)$的一级零点）

$f(z)=\frac{\phi(z)}{g(z)}$，$g(a)=0$，$g'(a)\neq 0$，$\phi(a)\neq 0$

则 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}} f(z)=\frac{\phi(a)}{g'(a)}$

例：计算 $\int_{|z|=2022} \tan\pi z\, dz$

解：$f(z)=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$

$f(z)$的全部奇点为 $z_k=k+\frac{1}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

且为1级极点

$\underset{z=z_k}{\mathrm{Res}} f(z)=\frac{\sin\pi(k+\frac{1}{2})}{-\pi\sin\pi(k+\frac{1}{2})}=-\frac{1}{\pi}$

所以 $\int_{|z|=2022} \tan\pi z\, dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{\pi}\right)\cdot 4044$

$=-8088i$

函数在无穷远点的留数

定义

$\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)dz=-C_1$　$(\Gamma: |z|=\rho>r)$

Γ^- 指顺时针方向，看作是绕无穷远点的正方向.

定理:

如果函数$f(z)$在扩充z平面上只有有限个孤立奇点（包括无穷远点在内），设为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \infty$，则$f(z)$在各点留数总和为零.

$\sum_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{\mathrm{Res}} f(z)+\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}} f(z)=0$

注意:

在$f(z)$的有限可去奇点 a处，必有 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z)=0$

但是，如果点∞为$f(z)$的可去奇点(解析点)，则 $\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\, f(z)$ 可以不是零.

例如，$f(z)=2+\frac{1}{z}$ 以$z=\infty$为可去奇点

但 $\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\, f(z)=-1$.

计算留数的另一公式

$$\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\, f(z) = -\underset{t=0}{\mathrm{Res}}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right]$$

倒代换，令$t=\frac{1}{z}$

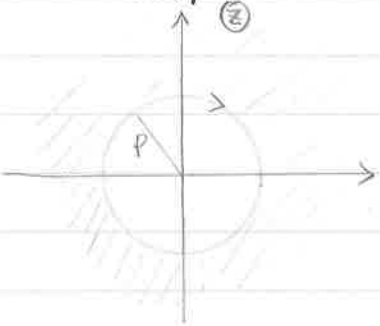
z平面上无穷远点的去心邻域 $N\setminus\{\infty\}$：$0\le r<|z|<+\infty$ 变为

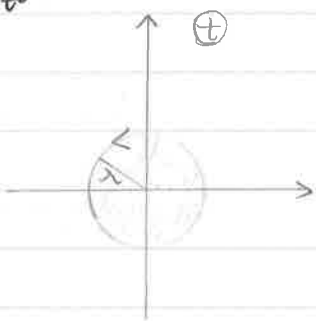
t平面上原点的去心邻域 $K\setminus\{0\}$：$0<|t|<\frac{1}{r}$

圆周Γ：$|z|=\rho>r$ 被变成圆周γ：$|t|=\lambda=\frac{1}{\rho}<\frac{1}{r}$

从而易证

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt$$





§2 留数定理计算实积分

1. 计算 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ 型积分

令 $z=e^{i\theta}$，则

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}.$$

θ 经历 $[0,2\pi]$ 时，z 沿圆周 $|z|=1$ 的正方向绕行一周.

注：

至于被积函数 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的连续性可不必先检验，只要看变换后的被积函数在 $|z|=1$ 上是否有奇点。

思想：

参数公式的逆向思维

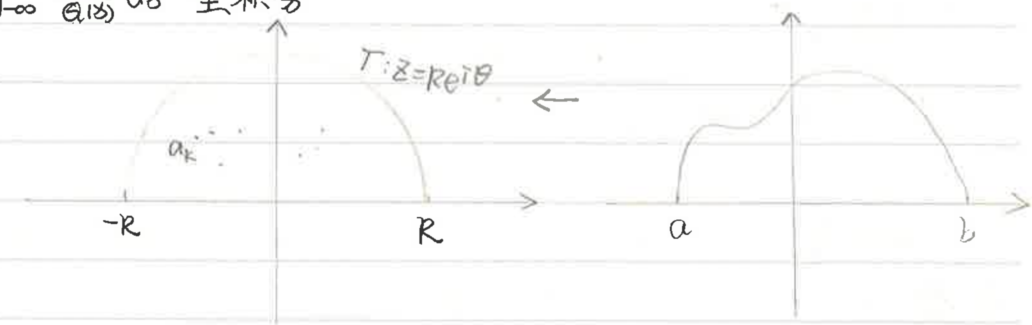
$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

$\int_0^{\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ 若被积 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 为偶函数

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cdots d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

奇偶性　　周期性

2. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ 型积分



使 R 充分大包含所有奇点.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname{Res}_{z=a_k}\frac{P(z)}{Q(z)}$$

思想：$\int_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{\Gamma_R}f(z)dz$

(上图)　　　　只剩实部，$z=x$

两边同时求极限，$R\to+\infty$

① $\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname{Res}_{z=a_k}f(z)$ 求极限不变

② $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$

③ $\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}f(z)dz=0$　　P173

积分存在：$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$　　$p\geq 2$ 时绝对收敛

定理 6.7　$n-m\geq 2$

3.（计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx$ 型）

计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos mx\,dx$、$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin mx\,dx$，$m>0$

（狄利克雷判别法）　$\downarrow\to 0$，有界.　　$P(x)$ 次数低于 $Q(x)$

思想：同2

此时，$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}dz$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname{Res}_{z=a_k}f(z)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos mx\,dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin mx\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx.$$

（若尔当引理）

设函数 $g(z)$ 沿半圆周 $\Gamma_R: z=Re^{i\theta}$（$0\leq\theta\leq\pi$，R 充分大）上连续，

且 $\lim_{R\to+\infty}g(z)=0$ 在 Γ_R 上一致成立，则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}g(z)e^{imz}dz=0\quad(m>0)$$

证：对于任给的 $\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当 $R>M$ 时有

$$|g(z)|<\varepsilon\ ,\ z\in\Gamma_R$$

于是，就有

$$\left|\int_{\Gamma_R} g(z)e^{imz}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} g(Re^{i\theta})e^{imRe^{i\theta}}\cdot Re^{i\theta}\cdot i\,d\theta\right|$$

$$\leq R\varepsilon\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta$$

其中 $|g(Re^{i\theta})|<\varepsilon$，$|Re^{i\theta}i|=R$

$$|e^{imRe^{i\theta}}|=|e^{-mR\sin\theta+imR\cos\theta}|=e^{-mR\sin\theta}$$

于是，由（若尔当不等式）

$$\frac{2\theta}{\pi}\leq\sin\theta\leq\theta\quad\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

就有 $\left|\int_{\Gamma_R} g(z)e^{imz}dz\right| \leq 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta$

$$\leq 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}}\,d\theta$$

$$=2\varepsilon R\cdot\left(-\frac{\pi}{2mR}\right)\ e^{-\frac{2mR}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi\varepsilon}{m}(1-e^{-mR})$$

$$<\frac{\pi\varepsilon}{m}$$

其中 $\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta$

（令 $t=\pi-\theta$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-mR\sin t}(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR}\sin t\,dt\ )$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta$$

例 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx\quad(m>0)$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx$

令 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}e^{imz}$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{imx}dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a_k>0}\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z)$$

$1+z^2=0$

$i, -i$ 上半平面只有 $z=i$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{imx} dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)$

$\because z=i$ 为 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}e^{imz}$ 的一级极点

$\therefore \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{e^{imz}}{1+z^2}$ $\qquad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{imz}}{2z}\Big|_{z=i}$

$= \lim_{z\to i} \frac{e^{imz}}{z+i} = \frac{e^{-m}}{2i}$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{1+x^2} dx$

$= 2\pi i \cdot \frac{e^{-m}}{2i} = \frac{\pi}{e^m}$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e^m}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{1+x^2} dx = 0$

$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e^m}$.

小结:

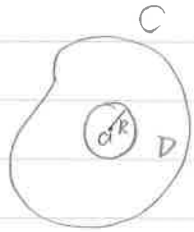
某些实的定积分可应用留数定理进行计算，尤其是对原函数不易直接求得的定积分和反常积分

其要点是将它化归为复变函数的围线积分.

§3 辐角原理及应用

$f(z)$为C内的亚纯函数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$



$$F(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$$

$f(z)=0$及$f(z)$的极点都可能是$F(z)$的奇点.

1° 若$z=a$为$f(z)$的n级零点

$$f(z)=(z-a)^n\phi(z)\quad,\phi(a)\neq 0$$

$$f'(z)=n(z-a)^{n-1}\phi(z)+(z-a)^n\phi'(z)$$

$$F(z)=\frac{n}{z-a}+\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}=\frac{n}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\cdots$$

∴ $z=a$为$F(z)$的1级极点，且

$$\operatorname*{Res}_{z=a}F(z)=n$$

2° a为$f(z)$的m级极点

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}\quad,g(a)\neq 0$$

$$f'(z)=-m(z-a)^{-m-1}g(z)+(z-a)^{-m}g'(z)$$

$$\therefore F(z)=\frac{-m}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{-m}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\cdots$$

∴ $z=a$为$F(z)$的1级极点，且$\operatorname*{Res}_{z=a}F(z)=-m$

由1°、2°，$\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)dz=N(f,C)-P(f,C)$

意义: $(\ln f(z))'=\frac{f'(z)}{f(z)}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C d\ln f(z)=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_C d\ln|f(z)|}_{=0}+\frac{1}{2\pi}\int_C d\arg f(z)$$

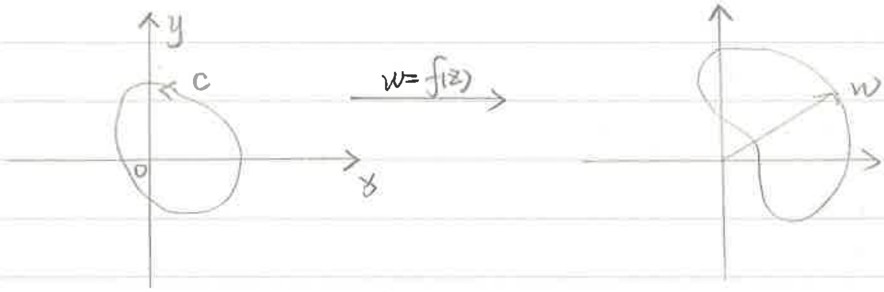
$$= \frac{1}{2\pi} \int_C d\arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

辐角原理:

$$N(f,C) - P(f,C) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

特别地, $f(z)$ 为闭曲线 C 内的解析函数, 则

$$N(f,C) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z).$$

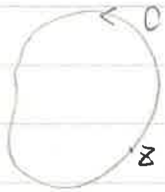


Rouchè 定理

设 C 为一条闭曲线, $f(z)$, $g(z)$ 满足

(1) $f(z)$, $g(z)$ 在 C 内解析, 且连续到 C

(2) $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in C$



则

$$N(f+g, C) = N(f, C).$$

证明: $N(f+g, C) = N(f,C) \Leftrightarrow \Delta_C \arg[f(z)+g(z)] = \Delta_C \arg f(z)$

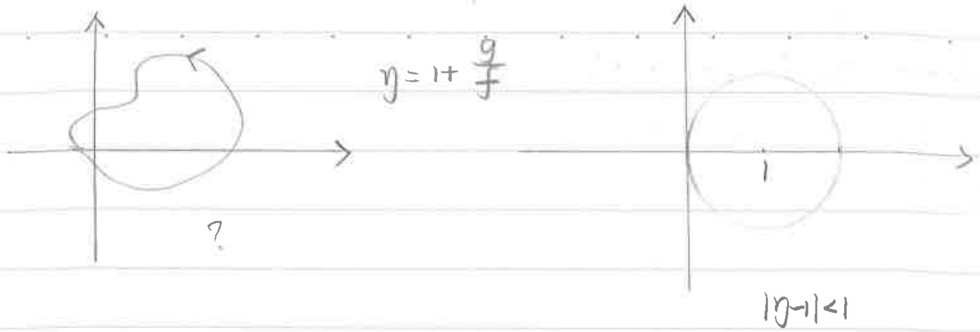
$\because \Delta_C \arg[f(z)+g(z)] = \Delta_C \arg f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]$

$$= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

$\therefore N(f+g, C) = N(f,C) \Leftrightarrow \Delta_C \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$

令 $\eta = \frac{g(z)}{f(z)}+1$, $\quad |\eta - 1| < 1$

$\therefore \Delta_C \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$



例：设 $|a|>e$，证明 $e^z-az^n=0$ 在 $|z|=1$ 内有 n 个根.

证明：令 $f(z)=-az^n$，$g(z)=e^z$

$C: |z|=1$

在 C 上（即 $|z|=1$ 时），$|f(z)|=|a|>e$

$|g(z)|=|e^z|=|e^{\cos\theta+i\sin\theta}|=e^{\cos\theta}\le e$

$\therefore$ 在 C 上，$|f(z)|>|g(z)|$

$\therefore N(f+g,C)=N(f,C)=n$

例 试证 $z^7-z^3+12=0$ 的根全部在 $1<|z|<2$ 内.

证明：①先证 $z^7-z^3+12=0$ 的根全部在 $|z|=2$ 内

令 $f(z)=z^7$，$g(z)=-z^3+12$，$C: |z|=2$

在 C 上，即 $|z|=2$ 时，$|f(z)|=z^7=128$

$|g(z)|=|-z^3+12|\le|-z^3|+12=20$

$\therefore |g(z)|<|f(z)|$，$|z|=2$

$\therefore N(f+g,C)=N(f,C)=7$

$\therefore$ 方程 z^7-z^3+12 在 $|z|=2$ 内有 7 个根

则 $z^7-z^3+12=0$ 的根全落在 $|z|=2$ 内

②再证 $z^7-z^3+12=0$ 在 $|z|=1$ 内无根

令 $f(z)=12$，$g(z)=z^7-z^3$，$C: |z|=1$

当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|=12$

$|g(z)|=|z^7-z^3|\le|z^7|+|-z^3|=2$

$\therefore |g(z)|<|f(z)|$

$\therefore N(f+g,C)=N(f,C)=0$

∴ 方程 z^7-z^3+12 在 $|z|=1$ 内无根

- 下证 z^7-z^3+12 在 $|z|=1$ 无根

$|z^7-z^3+12| \geq 12-|z^7-z^3| \geq 10>0$